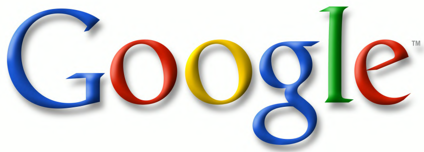
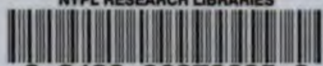






Aufgaben

aus der

Höheren Mathematik, Technischen Mechanik

und

Darstellenden Geometrie,

für

Bau-, Maschinen-, Elektro-, Kultur- und Vermessungs-Ingenieure sowie Architekten.

Veröffentlicht

von

Dr. Ludwig Marc.

MÜNCHEN 1907.
August Lachner, Polytechnische Buchhandlung.



Aufgaben

aus der

Höheren Mathematik, Technischen Mechanik

und

Darstellenden Geometrie,

welche bei der Vorprüfung für

Bau-, Maschinen-, Elektro-, Kultur- und Vermessungs-Ingenieure sowie Architekten an der K. Technischen Hochschule zu München

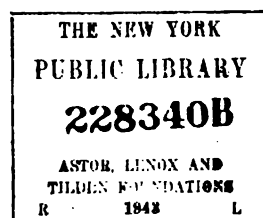
vom Jahre 1901 ab gestellt worden sind.

Veröffentlicht

von

Dr. Ludwig Marc.

MÜNCHEN 1907.
August Lachner, Polytechnische Buchhandlung.



Inhaltsverzeichnis.

I. Höhere Mathematik.

---

1. Aufgabe. (S.-S. 1901.)

Zwei Kreise mit den Gleichungen

$$x^2 + y^2 - 2a_1x - 2b_1y = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 1.$$

und

$$x^2 + y^2 - 2a_2x - 2b_2y = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 2.$$

gehen durch den Ursprung O des Koordinatensystems. Eine gleichfalls durch den Nullpunkt gehende veränderliche Gerade von der Gleichung

$$y = x \cdot \operatorname{tg} \varphi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 3.$$

schneidet die beiden Kreise ausser in O noch in den Punkten A bezw. B. Welches ist der Ort des Punktes, der die Strecke AB in konstantem Verhältnis λ teilt? Was bilden sämtliche Oerter, die zu allen möglichen Werten λ gehören? Für welche Werte von λ berührt der zugehörige Ort eine der Koordinatenachsen?

2. Aufgabe.

Man bestimme die Gestalt der Kurve von der Gleichung

$$y^2 = \frac{(c^2 - x^2)^3}{c^4};$$

insbesondere deren Wendepunkte und Wendetangenten, sowie die Krümmungsradien in den Schnittpunkten mit den Koordinatenachsen. Wie groß ist die Fläche, welche die Kurve umschließt? Welche Koordinaten hat der Schwerpunkt jenes Flächenstückes, das von den positiven Koordinatenachsen und der Kurve begrenzt wird? Wie groß ist das Volumen des Rotationskörpers, welcher entsteht, wenn die Kurve: a) um die x-Achse, b) um die y-Achse rotiert?

3. Aufgabe.

a) Man integriere die Differentialgleichung:

$$xy'' + 2y' = x^2.$$

b) Man integriere das System der zwei simultanen Differentialgleichungen:

$$\frac{dy}{dx} = 2z - 3y + x,$$

$$\frac{dz}{dx} = 2y.$$

4. Aufgabe.

Vorgelegt ist die Fläche

$$z = \frac{1 - y^2}{1 + x^2}.$$

1. Man diskutiere die Gestalt der Fläche in ihrem Verlaufe oberhalb der xy-Ebene durch Betrachtung ihrer Horizontalschnitte, sowie ihrer Schnitte mit den drei Koordinatenebenen.

2. Weiter berechne man: α) das Volumen des Körpers, der zwischen der Fläche als oberer Begrenzung und der xy-Ebene als unterer Begrenzung eingeschlossen ist; β) das Volumen des Körpers, welcher sich über dem von den Geraden $y = 0$, $y = x$, $x = 1$ der xy-Ebene begrenzten Dreieck bis zur gegebenen Fläche erhebt.

3. Welcher Art ist die Krümmung und wie groß sind die Hauptkrümmungsradien der Fläche in ihrem Schnittpunkt mit der z-Achse?

5. Aufgabe. (W.-S. 1902.)

Gegeben ist die Gleichung einer ebenen Kurve in Parameterform:

$$x = at \quad y = \frac{a}{t}.$$

1. Welche Beziehung besteht zwischen den Parametern t_1 und t_2 zweier Punkte A und B, welche die Entfernung b voneinander haben?
2. Wie berechnen sich die Koordinaten ξ und η des Mittelpunktes C der Verbindungslinie AB aus t_1 und t_2?
3. Man drücke $t_1 + t_2$, $t_1 \cdot t_2$ und $t_1 - t_2$ durch die Koordinaten ξ und η aus.
4. Man eliminiere aus der Beziehung 1. mit Hilfe von 3. die Größen t_1 und t_2.
5. Welche Bedeutung hat die gefundene Gleichung in ξ und η? Welche Kurve stellt sie dar, wenn man $a = 0$ setzt?
6. Man rechne die bei 4. gefundene Gleichung in Polarkoordinaten mit dem Anfangspunkt des Koordinatensystems als Pol und der x-Achse als Polarachse um.

6. Aufgabe.

Es soll die Oberfläche berechnet werden, welche durch Rotation um die x-Achse desjenigen Stückes der Parabel

$$y^2 = 2px$$

entsteht, das zwischen den Abszissen $x = 0$ und $x = a$ liegt.

In dem erhaltenen Resultate drücke man p durch die zu $x = a$ gehörige Ordinate b aus.

Durch Reihenentwicklung nach Potenzen von $\frac{a}{b}$ leite man sodann eine Näherungsformel für die Oberfläche ab, die für den Fall brauchbar ist, daß $\frac{a}{b}$ einen kleinen, echten Bruch bedeutet. Diskussion der drei ersten Glieder derselben.

7. Aufgabe.

a) Vorgelegt ist die Kurvenschar:

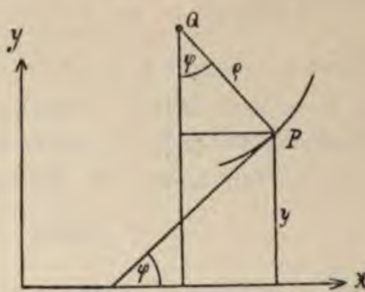
$$y = c \cdot e^{-x} + x - 1.$$

Man suche die Differentialgleichung, welcher diese Kurven genügen; sodann die Differentialgleichung des Systems der Orthogonaltrajektorien und durch Integration die Gleichung der Orthogonaltrajektorien selbst.

b) Welches ist die Differentialgleichung aller Kurven, für welche der für einen beliebigen Kurvenpunkt P konstruierte Krümmungsmittelpunkt Q eine um die konstante Strecke a größere Ordinate hat, als Punkt P selbst, so daß also:

$$\rho \cdot \cos \varphi = a.$$

Man integriere diese Differentialgleichung und bestimme speziell diejenige Kurve des Systems, welche durch den Punkt $x = 0$, $y = 0$ hindurchgeht und dort die x-Achse berührt.



Figur 1.

8. Aufgabe.

Eine Raumkurve ist durch die Gleichungen:

$$x = 2t \quad \dots \dots \quad 1.$$
$$y = t^2 \quad \dots \dots \quad 2.$$
$$z = \overset{e}{\log}\, t \quad \dots \dots \quad 3.$$

in Parameterdarstellung gegeben.

a) Was für Kurven sind ihre Projektionen in die Koordinatenebenen?

b) Man berechne die Länge des Bogenstückes vom Punkte $t_1 = 1$ bis zum Punkte $t_2 = 3$.

c) Weiter berechne man die Radien der ersten und zweiten Krümmung für den Kurvenpunkt mit dem Parameter $t_1 = 1$.

9. Aufgabe. (S.-S. 1902.)

Gegeben ist die Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Man zeichne ein gleichschenkliges Dreieck ABC in die Ellipse so ei daß seine Ecken auf der Ellipse liegen, und zwar speziell die Spitze A i unteren Scheitel der Ellipse.

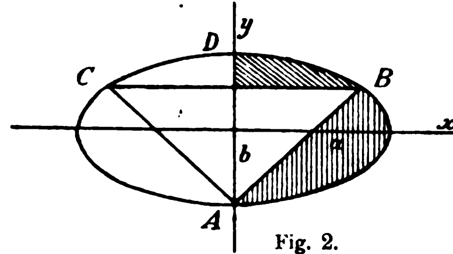


Fig. 2.

1. Wie ist die Lage der Ecken B ur C zu wählen, wenn der Fläche inhalt des Dreiecks möglichst gr(sein soll?
2. Wie groß sind in diesem Falle d vier Flächenstücke, in welche d Ellipse zerlegt wird?

10. Aufgabe.

Vorgelegt ist die Kurvenschar:

$$\rho = \lambda + a \sin \frac{\varphi}{2}$$

(in Polar-Koordinaten ρ und φ), wo λ ein von Kurve zu Kurve sich ändernd Parameter ist.

1. Man zeichne die Kurven, die sich für die Parameterwerte
$$\lambda = 0$$
$$\lambda = a$$
$$\lambda = 2a$$
ergeben.
2. Man berechne die zwischen den zwei Kurven der Schar, für welcl $\lambda = 0$ bezw. $\lambda = a$ ist, eingeschlossene Fläche.
3. Man bestimme näherungsweise die Bogenlänge der Kurve $\lambda = a$ zwisch(den Grenzen $\varphi = 0$ und $\varphi = \frac{\pi}{2}$ (also für das im ersten Quadrant(gelegene Kurvenstück), indem man das Integral durch ein geeignet Näherungsverfahren auswertet.

11. Aufgabe.

1. Man zeige, daß die folgende Differentialgleichung in den Polarkoor(naten r und φ eines Kurvenpunktes
$$(r^3 - \cos 3\varphi)\, dr + r \sin 3\varphi\, d\varphi = 0$$
einen von r allein abhängigen integrierenden Faktor besitzt.
2. Man bestimme diesen integrierenden Faktor und bilde das allgemei(Integral der Differentialgleichung.
3. Man suche dasjenige partikuläre Integral der Differentialgleichung, welch einer durch den Anfangspunkt des Koordinatensystems gehenden Kur' entspricht.
4. Es soll der Verlauf dieser Kurve annähernd bestimmt werden.

12. Aufgabe.

Zwei Räume sind punktweise aufeinander bezogen. Zwischen den Koordinaten xyz eines Punktes des ersten Raumes und jenen $\xi\eta\zeta$ des entsprechenden Punktes des zweiten Raumes bestehen folgende Gleichungen:

$$\text{I.}\quad x = \frac{\xi a^2}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2} \quad y = \frac{\eta b^2}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2} \quad z = \frac{\zeta c^2}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}.$$

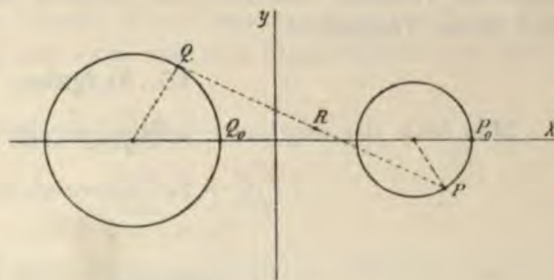
1. Welche Flächen des zweiten Raumes entsprechen den parallelen Ebenen des ersten Raumes mit der Gleichung:

   $$\text{II.}\quad x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - \lambda = 0,$$

   wo λ ein veränderlicher Parameter ist?
2. Welche Kurven des zweiten Raumes entsprechen den geradlinigen Durchschnitten zweier beliebiger Ebenen des ersten Raumes?
3. Welche Flächen des ersten Raumes entsprechen den Ebenen des zweiten Raumes?
4. Welche Kurven des ersten Raumes entsprechen den Geraden des zweiten Raumes?

13. Aufgabe. (W.-S. 1903.)

Gegeben sind zwei Kreise, deren Radien a bezw. b und deren Mittelpunkts-Koordinaten $0, +c$; $0, -c$ sind. Auf dem ersteren bewegt sich ein Punkt P mit der gleichmässigen Winkelgeschwindigkeit w im Sinne des Uhrzeigers, auf dem zweiten ein Punkt Q mit derselben Winkelgeschwindigkeit w im entgegengesetzten Drehsinn. Zur Zeit $t = 0$ befinden sich die Punkte in P_0 bezw. Q_0 auf der x-Achse.



Figur 3.

Man bestimme:

1. Die Koordinaten beider Punkte zur Zeit t.
2. Die Koordinaten desjenigen Punktes R, welcher die Verbindungslinie PQ halbiert.
3. Den geometrischen Ort, den dieser Halbierungspunkt im Laufe der Zeit beschreibt, und zwar der Lage und Größe nach.
4. Was ergibt sich speziell, wenn die beiden Radien a und b einander gleich sind?

14. Aufgabe.

1. Man gebe eine Zeichnung des Verlaufes der beiden Kurven:

$$\text{I.}\quad y^2 = 1 - \frac{4}{3}\sin^2 x$$

$$\text{II.}\quad y^2 = 1 + \frac{4}{3}\sin^2 x$$

   unter Angabe ihrer Horizontal- und Vertikaltangenten.
2. Man lasse die beiden Kurven um die x-Achse rotieren. Dann sollen die Volumina derjenigen Rotationskörper berechnet werden, welche von den entstandenen Flächen im Intervall zwischen $x = \pi$ und $x = -\pi$ begrenzt werden.
3. Endlich berechne man auch den Inhalt der von den beiden Kurven in der xy-Ebene, wieder im Intervalle von $x = -\pi$ bis $x = +\frac{\pi}{6}$ begrenzten ebenen Flächenstücke mittelst der Simpsonschen Regel. Als Breite der Streifen, in welche bei der Simpsonschen Regel die Flächen zerlegt werden, genügt es, $h = \frac{\pi}{6}$ zu wählen.

15. Aufgabe.

An ein Ellipsoid von der Gleichung:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

soll eine Tangentialebene so gelegt werden, daß sie mit den drei Koordinatenebenen ein Tetraeder von möglichst kleinem Inhalt bildet. Wie groß ist der Inhalt dieses Tetraeders?

16. Aufgabe.

Man bilde das allgemeine Integral der Differentialgleichung ($a > 0$)

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2a\frac{dy}{dt} + a^2 y = \sin bt.$$

17. Aufgabe. (S.-S. 1903.)

$$y = 4\sin x + \cos 2x.$$

Von der Kurve, die durch obige Gleichung dargestellt ist, soll ermittelt werden:

1. Die Punkte mit horizontaler Tangente.
2. Die Werte des Krümmungsradius in diesen Punkten.
3. Die Wendepunkte und Wendetangenten.

4. Die Fläche, welche von der Kurve und der zur x-Achse parallelen Verbindungslinie zweier Wendepunkte begrenzt und oberhalb letzterer gelegen ist.
5. Die Gestalt der Kurve.

18. Aufgabe.

Die Gleichung einer Ellipse in Parameterform lautet:

$$x = 16 \cos \lambda$$
$$y = 9 \sin \lambda.$$

Man bestimme jene Tangenten, von welchen die Koordinatenachsen das kürzeste Stück abschneiden. Wie groß ist dasselbe?

19. Aufgabe.

Vorgelegt ist die in Polarkoordinaten geschriebene Gleichung:

$$r(1 + \varepsilon \cos \varphi) = c.$$

1. Es sei zunächst $\varepsilon = \frac{1}{2}$ gegeben, während c beliebige Zahlenwerte annehmen kann, denen je eine Kurve entspricht.

   Was sind dies für Kurven? Man bestimme weiter die Differentialgleichung dieses Kurvensystems und das System der Orthogonalkurven.
2. Für c soll $\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}$ eingesetzt werden. Man suche die Enveloppe des für verschiedene Werte von ε sich ergebenden Kurvensystems.
3. Man betrachte das doppelt unendliche Kurvensystem, das man erhält, wenn sowohl c als auch ε beliebige Zahlenwerte annehmen. Aus diesem System suche man die spezielle Kurve heraus, welche durch den Punkt $\varphi = 30^0$, $r = 2$ geht und dort mit dem Radiusvektor den Winkel $\vartheta = 45^0$ bildet.

20. Aufgabe.

Man diskutiere die Gestalt der Fläche

$$x^2 + 2y^2 = z^3(1-z)$$

durch Untersuchung ihrer Horizontalschnitte (parallel zur xy-Ebene) und ihrer Vertikalschnitte durch die z-Achse.

Weiter berechne man das Volumen des von der Fläche eingeschlossenen Körpers durch Integration über seine Horizontalschnitte.

21. Aufgabe. (W.-S. 1904.)

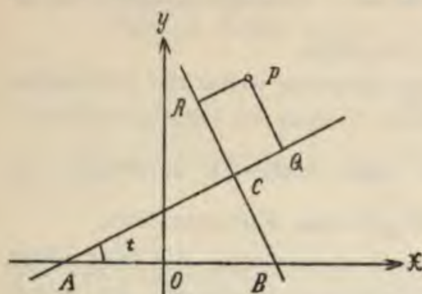
$$y = a\left(e^{\frac{x}{b}} - e^{\frac{x}{c}}\right).$$

Von dieser Kurve soll ermittelt werden:

1. Die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen.
2. Die Tangenten in diesen Schnittpunkten.
3. Die Koordinaten des höchsten oder tiefsten Punktes.
4. Die Koordinaten und die Neigung der Tangenten des Wendepunktes.
5. Der Krümmungsradius im höchsten oder tiefsten Punkt.
6. Der Krümmungsradius im Schnittpunkt mit der x-Achse.
7. Eine genaue Zeichnung der Kurve für die Werte $a = 2$ cm, $b = 1$ cm, $c = 0{,}5$ cm, in welche die gerechneten Punkte einzutragen sind.
8. Die Berechnung des Flächeninhaltes zwischen der x-Achse und dem oberhalb derselben verlaufenen Teile der Kurve mit den eben gegebenen Werten der Konstanten.

22. Aufgabe.

Die beiden Schenkel eines beweglichen rechten Winkels ACB gehen stets durch die festen Punkte A und B, wobei $0A = 0B$ ist. Ein mit diesen Schenkeln fest verbundener Punkt P beschreibt bei der Bewegung des Winkels eine Kurve.



Figur 4.

1. Man beweise, daß deren Gleichung in Parameterform mit dem Winkel t als Parameter (siehe Figur!) folgendermaßen lautet:
$$x = 0B\cos 2t + RP\cos t - QP\sin t$$
$$y = 0B\sin 2t + RP\sin t + QP\cos t.$$
2. Man zeige, dass die Normale des Punktes P durch den Punkt S mit den Koordinaten: $x_0 = -0B\cos 2t$, $y_0 = -0B\sin 2t$ hindurchgeht.
3. Man setze $QP = 0$ und bilde dann das Integral $\int_{t=\frac{\pi}{2}}^{t=0} y\,dx$. Welchen Flächeninhalt stellt dasselbe dar?
4. Man zeichne die Kurve für den Fall: $0B = 30$ mm, $RP = QP = 30\sqrt{2}$ mm.

23. Aufgabe.

Vorgelegt ist die Raumkurve (in Parameterdarstellung):
$$x = \cos t + t \cdot \sin t$$
$$y = \sin t - t \cdot \cos t$$
$$z = t.$$

1. Man zeige, daß diese Kurve
   a) auf dem einschaligen Hyperboloid $x^2 + y^2 = 1 + z^2$,
   b) auf der Fläche $x\cos z + y\sin z = 1$

   liegt.

2. Die zweite (b) dieser Flächen kann durch die Bewegung einer Geraden erzeugt werden, die dabei stets parallel zur xy-Ebene bleibt. Man gebe die Art dieser Bewegung genauer an.
3. Man berechne die Länge des Kurvenbogens der gegebenen Raumkurve von dem Punkte mit dem Parameter $t_1 = 0$ bis zu dem Punkte mit dem Parameter $t_2 = \frac{\pi}{2}$.
4. Man gebe die Projektion der Kurve auf die xz-Ebene an und zeige, wie man sich graphisch ein Bild dieser Projektionskurve verschaffen kann.
5. Man berechne den Radius der ersten Krümmung der Raumkurve für den Kurvenpunkt $t_1 = 0$.

24. Aufgabe.

Vorgelegt ist die Differentialgleichung:

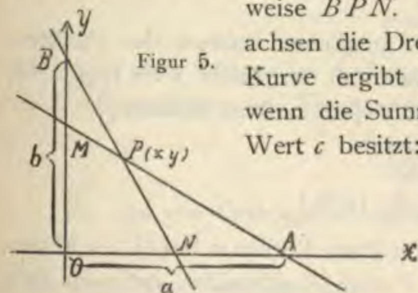
$$2y \cdot \left(x - \frac{1}{x^2}\right) \cdot dx + \left(x^2 + \frac{2}{x} - 3y^2\right) \cdot dy = 0.$$

1. Man zeige, daß die linke Seite derselben ein totales Differential darstellt, und ermittle demgemäß das Integral der Differentialgleichung.
2. Man gebe speziell die Kurven des Integralsystems an, welche
   a) durch den Punkt $x = 1,\ y = 1$,
   b) durch den Punkt $x = 1,\ y = 0$

   hindurchgehen.
3. Man stelle ferner die Differentialgleichung des Systems der Orthogonaltrajektorien auf und integriere sie; dabei sei zur Erleichterung der Integration bemerkt, daß diese Differentialgleichung durch die Substitution $y^2 = z$ in eine lineare Differentialgleichung übergeht.

25. Aufgabe. (S.-S. 1904.)

Gegeben sind die Punkte A (Koordinaten a, 0) und B (Koordinaten 0, b). Durch einen Punkt P (Koordinaten x, y) zieht man die Geraden APM beziehungsweise BPN. Diese Geraden bilden mit den Koordinatenachsen die Dreiecke AMO beziehungsweise NBO. Welche Kurve ergibt sich als geometrischer Ort des Punktes P, wenn die Summe der beiden Dreiecksinhalte den konstanten Wert c besitzt:



Figur 5.

$$\triangle(AMO) + \triangle(NBO) = c.$$

Speziell untersuche man genauer

1. den Fall, in welchem $c = 0$ ist,
2. den Fall, in welchem $c = ab$ ist.

26. Aufgabe.

Man diskutiere die Kurve

$$y^2 = \frac{x^2}{a^2}(a + x)(b - x)$$

für die beiden Fälle $b = a$ beziehungsweise $b = 2a$, in bezug auf Horizontal- und Vertikal-Tangenten, sowie auf Doppelpunkte und zeichne den ungefähren Verlauf der Kurven.

Sodann berechne man den Flächeninhalt der von der Kurve eingeschlossenen endlichen Flächenstücke.

27. Aufgabe.

Die Gleichungen einer Fläche in Parameterform lauten:

$$x = u \cos v$$
$$y = u \sin v$$
$$z = m \sin 2v.$$

(x, y, z rechtwinklige Koordinaten, u, v Parameter.)

1. Wie ist der Verlauf der Linien $u =$ konst. und $v =$ konst.?
2. Man zeige, daß die Linien $u =$ konst. und $v =$ konst. senkrecht aufeinanderstehen.
3. Man bilde das Linienelement der Fläche.
4. Man berechne die Richtungskosinus der Normalen in einem Punkt mit den Parametern u und v.
5. Man gebe die Gleichung der Fläche in rechtwinkligen Koordinaten an.

28. Aufgabe.

Die Bewegung eines Punktes im Raum ist durch folgendes simultanes System von Differentialgleichungen bestimmt:

$$\frac{dy}{dt} = x$$
$$\frac{dx}{dt} = -y$$
$$\frac{dz}{dt} = k.$$

1. Man bestimme durch Integration die möglichen Bahnen des Punktes.
2. Wie lange Zeit braucht der Punkt, um von der Stelle $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$ zur Ebene von der Gleichung: $y + x = 0$ zu kommen?
3. In welchem Punkte trifft er diese Ebene?

29. Aufgabe. (W.-S. 1905.)

Auf der Peripherie eines Kreises, der mit dem Radius r um O als Mittelpunkt beschrieben ist und die Achse Ox im Punkte A schneidet, befinden sich

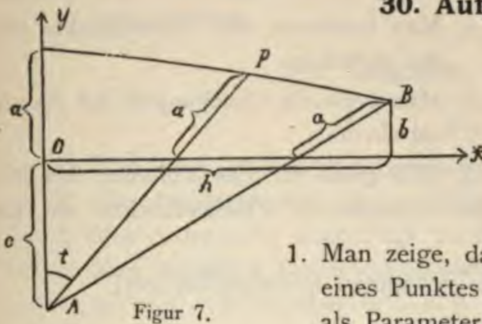
zwei Punkte P und P'. Die Lage derselben ist durch die Winkel $\sphericalangle POA = \lambda$ und $P'OA = 2\lambda$ gegeben.

1. Man drücke die rechtwinkligen Koordinaten dieser Punkte P und P', sowie jene des Mittelpunktes M der Sehne PP' durch den Radius r und den Winkel λ aus.
2. Man zeichne den ungefähren Verlauf des geometrischen Ortes, den M beschreibt, wenn λ variiert.
3. In welchen Punkten hat jener geometrische Ort vertikale und horizontale Tangenten?
4. Wie groß ist die Krümmung des geometrischen Ortes im Punkte A?



Figur 6.

30. Aufgabe.



Figur 7.

Der Schaft einer runden Säule vom unteren Halbmesser a, oberen Halbmesser b und der Höhe h ist nach einer Konchoide gekrümmt, deren Konstruktion in nebenstehender Figur angedeutet ist. (c ist konstant, t variabel.)

1. Man zeige, daß sich die rechtwinkligen Koordinaten eines Punktes P der Konchoide mittels des Winkels t als Parameter folgendermassen ausdrücken lassen:
$$x = c \operatorname{tg} t + a \sin t;\; y = a \cos t.$$
2. Man berechne die Neigung der Tangente im Punkte B gegen die x-Achse.
3. Man berechne das Volumen der Säule und drücke es durch die Größen a, b und h aus.

31. Aufgabe.

Man bestimme die Horizontalkurven (Schnitte mit den zur xy-Ebene parallelen Ebenen) und Fallinien (Orthogonaltrajektorien hiezu) der Fläche:
$$z = \frac{x^4}{2a^3} + \frac{y^4}{2b^3}$$
und zeige, dass letztere im Anfangspunkt des Koordinatensystems einen Doppelpunkt mit gemeinsamen Tangenten haben.

32. Aufgabe.

Es sind die Orthogonaltrajektorien der Geradenschar
$$x \cos t + y \sin t - a \sin 2t = 0$$
in Parameterform zu bestimmen.

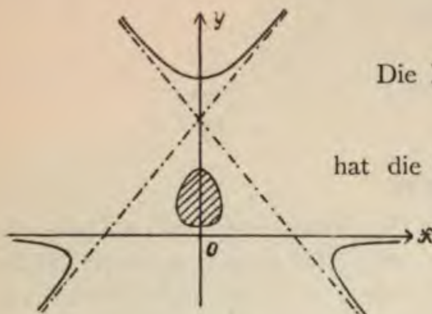
33. Aufgabe. (S.-S. 1905.)

Es sind Mittelpunkt, Achsenrichtungen und Achsen des Kegelschnitts von der Gleichung

$$x^2\left(\frac{\cos^2\varphi}{a^2}+\frac{\sin^2\varphi}{b^2}\right)+2xy\cos\varphi\sin\varphi\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)+y^2\left(\frac{\sin^2\varphi}{a^2}+\frac{\cos^2\varphi}{b^2}\right)-1=0$$

zu bestimmen.

Wie ist die Figur aller Kegelschnitte für die verschiedenen Werte φ?



Figur 8.

34. Aufgabe.

Die Kurve von der Gleichung

$$y\left[(y-2)^2-x^2\right]-1=0$$

hat die in nebenstehender Figur skizzierte Gestalt.

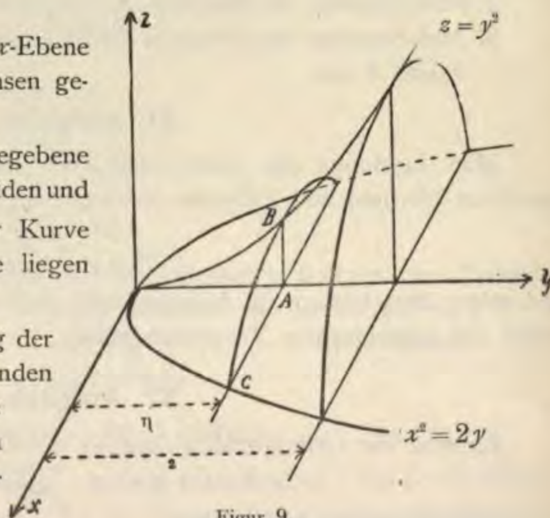
1. Man bestimme die Schnittpunkte mit der y-Achse.
2. Man gebe die Gleichungen der Asymptoten an.
3. Wie gross ist das Volumen des Rotationskörpers, der durch Drehung des schraffierten Flächenstückes um die y-Achse erzeugt wird?
4. Wo liegt der Schwerpunkt des genannten Rotationskörpers?

35. Aufgabe.

In den Parallelebenen zur zx-Ebene sind Parabeln mit vertikalen Achsen gezeichnet, welche alle

a) die in der xy-Ebene gegebene Parabel $x^2=2y$ schneiden und

b) ihre Scheitel auf der Kurve $z=y^2$ der yz-Ebene liegen haben.



Figur 9.

1. Wie lautet die Gleichung der in der Ebene $y=\eta$ liegenden Parabel, und weiter die Gleichung der von allen diesen Parabeln gebildeten Fläche?

2. Welches ist die Gestalt der Schnittkurven der Fläche mit Ebenen parallel zu den Koordinatenebenen?
3. Wie groß ist das Volumen des Körpers, der unten von der xy-Ebene, seitlich von der Ebene $y = 2$ und oben von der Fläche begrenzt wird?

36. Aufgabe.

Vorgelegt ist die Differentialgleichung

$$y'' - \frac{2}{x} y' + 6 = 0.$$

1. Man bestimme das allgemeine Integral derselben.
2. Man verschaffe sich eine Vorstellung über Gestalt und Lage der Integralkurven.
3. Man suche den geometrischen Ort der Wendepunkte aller derjenigen Integralkurven, die durch den Anfangspunkt gehen.
4. Man bestimme alle diejenigen Integralkurven, welche die x-Achse (irgendwo) berühren.

37. Aufgabe. (W.-S. 1906.)

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}.$$

1. Man zeige, dass obige Gleichung einen Kegelschnitt darstellt.
2. Man bestimme die Art des Kegelschnittes.
3. Man untersuche seine Lage zu den Koordinatenachsen.
4. Man bestimme die Koordinaten des Berührpunktes einer Tangente, die mit der x-Achse den Winkel φ einschliesst

38. Aufgabe.

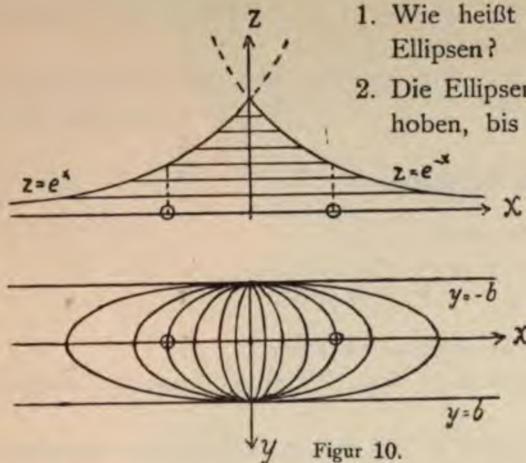
$$x = a \cos^5 t, \quad y = a \sin^5 t.$$

Obige Formeln stellen die Gleichung einer ebenen Kurve in Parameterform dar. Man berechne:

1. Koordinaten,
2. Tangentenrichtung,
3. Krümmungsradius in den Punkten $t = 0$, $t = \frac{\pi}{4}$, $t = \frac{\pi}{2}$;
4. die Länge der Kurve zwischen den Punkten $t = 0$ und $t = \frac{\pi}{2}$.

39. Aufgabe.

Gegeben ist in der xy-Ebene das Büschel der Ellipsen, welche die Geraden $y = +b$ und $y = -b$ in ihren Schnittpunkten mit der y-Achse berühren. (Vgl. Figur 10.)



Figur 10.

1. Wie heißt die Gleichung des Systems dieser Ellipsen?
2. Die Ellipsen werden parallel zur xy-Ebene gehoben, bis ihre ursprünglich auf der x-Achse gelegenen Scheitel auf den ausgezogenen Teilen der Kurven $z = e^x$ bezw. $z = e^{-x}$ liegen, so dass also die Ellipsen die »Niveaulinien« einer Fläche werden. Man gebe die Gleichung dieser Fläche an.
3. Welches Volumen hat der Körper, der von der xy-Ebene und der Fläche begrenzt wird?
4. Man stelle die Gleichung der Projektionen der »Fall-Linien« der vorliegenden Fläche in die xy-Ebene (d. h. der Orthogonaltrajektorien des Ellipsenbüschels) auf und zeichne den ungefähren Verlauf dieser Trajektorien.

40. Aufgabe.

Man integriere die Differentialgleichung

$$y''' - 3y'' + 2y' = 10 \cos x.$$

Sodann suche man die Gleichung derjenigen Integralkurve, welche durch den Anfangspunkt des Koordinatensystems hindurchgeht, dort eine horizontale Tangente und einen Wendepunkt hat und stelle den Verlauf dieser speziellen Integralkurve in der Umgebung dieses Punktes durch eine nach Potenzen von x fortschreitende Reihe näherungsweise dar.

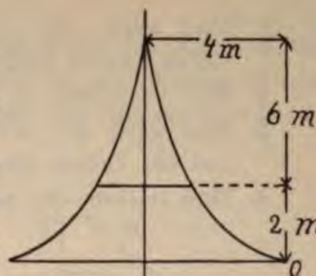
41. Aufgabe. (Architekten.)

Gegeben ist die Gleichung

$$y = 1 + x - \frac{\cos 2x}{2}.$$

1. Zeichne den ungefähren Verlauf der durch sie dargestellten Kurve.
2. Bestimme ihre höchsten und tiefsten Punkte.
3. Stelle die Gleichung für die Wendepunkte auf.
4. Berechne den Krümmungsradius der Kurve im Punkte $x = \frac{\pi}{2}$.
5. Bestimme die von der Kurve, der Abszissenachse und den beiden Ordinaten in den Punkten $x = 0$ und $x = \frac{\pi}{2}$ eingeschlossenen Fläche.

42. Aufgabe. (Architekten.)



Figur 11.

Eine Turmspitze wird durch einen Rotationskörper, dessen Meridiankurve eine Parabel ist, mit dem Scheitel in O dargestellt. Die Höhe der Turmspitze beträgt 6 m und die Lage ihrer Basis über dem Scheitel der erzeugenden Parabel 2 m, während die Entfernung des Scheitels der letzteren von der Rotationsachse 4 m ist. Man berechne das Volumen und die Oberfläche der Turmspitze.

43. Aufgabe. (Vermessungsingenieure.)

Gegeben ist in Polarkoordinaten r und φ die Kurve

$$r = \frac{p}{1 + \cos 2\varphi}.$$

1. Zeichne den Verlauf der Kurve.
2. Bestimme die Vertikaltangenten.
3. Berechne die Länge der Polartangente und -Normale und den Krümmungsradius für den Punkt $\varphi = 45^\circ$.
4. Man bestimme die Fläche der Kurve zwischen den Grenzen $\varphi = -45^\circ$ und $\varphi = +45^\circ$.
5. Man setze die Kurvengleichung in rechtwinklige Koordinaten um, bezogen auf den Pol als Anfangspunkt und die Polarachse als x-Achse.

44. Aufgabe. (Vermessungsingenieure.)

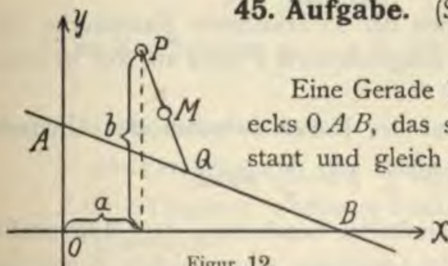
Gegeben die Kurvenschar

$$y(x + \lambda) = \frac{\lambda^2}{2},$$

wo λ ein veränderlicher Parameter ist.

1. Man zeichne den ungefähren Verlauf der Kurvenschar.
2. Bestimme die Umhüllende und zeichne sie ein.
3. Stelle die Differentialgleichung der Kurvenschar auf.
4. Man stelle die Differentialgleichung der Orthogonaltrajektorien her und integriere sie.

45. Aufgabe. (S.-S. 1906. — Bau-, Maschinen-, Elektro-, Kultur-Ingenieure.)



Figur 12.

Eine Gerade bewegt sich so, dass die Fläche des Dreiecks $0AB$, das sie mit den Koordinatenachsen bildet, konstant und gleich c ist.

Der Halbierungspunkt Q der Strecke AB ist mit dem festen Punkte P (a, b) geradlinig verbunden.

1. Man zeige, dass der Mittelpunkt M der Verbindungslinie PQ ei Kurve zweiter Ordnung beschreibt.
2. Man bestimme die Art dieser Kurve und die Lage der Asymptote
3. Man gebe die Gleichung der Kurve, bezogen auf ihre Hauptachs und die Grösse dieser Hauptachsen, an.
4. Man zeichne den ungefähren Verlauf der Kurve.

46. Aufgabe.

Gegeben ist die Kurve $y = a x^n$, wo a und n Konstante sind.

1. Man stelle die Gleichung der Tangente in den Koordinaten ξ und für einen Punkt mit der Abszisse x in Parameterform auf, mit x a Parameter.
2. Man trage auf den Tangenten vom Berührungspunkt aus die konstan Länge l auf und bestimme die Koordinaten u und v des Endpunkt in Parameterform mit x als Parameter.
3. Man bestimme die Differentialgleichung der Tangentenschar der Kur $y = a x^n$.
4. Man stelle die Differentialgleichung der Orthogonaltrajektorien (Ev venten) zu dieser Tangentenschar auf und integriere sie für den We $n = \frac{2}{3}$. Welche Kurve erscheint, wenn speziell die Integrationskonstan gleich Null gesetzt wird?

47. Aufgabe.

Die Bewegung eines Punktes im Raume, abhängig von der Zeit t, i bestimmt durch die drei Gleichungen:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\alpha^2 x; \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = -\alpha^2 y; \quad \frac{d^2 z}{dt^2} = b; \text{ (α und b sind Konstante).}$$

Man integriere diese Differentialgleichungen und bestimme die Integration konstanten aus folgenden Bedingungsgleichungen, die für die Zeit $t = 0$ gelte

$$\frac{dx}{dt} = \alpha \cdot c; \quad \frac{dy}{dt} = 0; \quad \frac{dz}{dt} = 0;$$
$$x = 0; \quad y = c; \quad z = 0.$$

Ferner bestimme man die Projektionen der so erhaltenen Raumkurve a die drei Koordinatenebenen und gebe die ausgezeichnete Fläche an, auf welch die Raumkurve liegt.

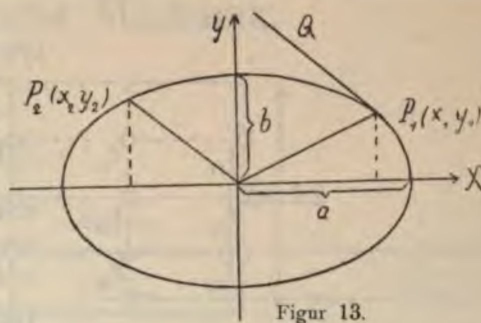
Man zeichne den ungefähren Verlauf der Kurve zwischen den Grenz $z = 0$ und $z = 4$, indem man $\alpha = 1$, $c = 2$, $b = \frac{2}{\pi^2}$ wählt.

Endlich sei der Punkt, der die Raumkurve beschreibt, der Mittelpun einer Kugel vom Radius c. Man stelle die Gleichung einer solchen Kugel f

eine durch den Parameter t bestimmte Lage des Mittelpunktes auf und bestimme die Länge der Raumkurve sowie Inhalt und Oberfläche der umhüllenden Fläche, die durch die Bewegung der Kugel entsteht, zwischen den Grenzen $t = 0$ und $t = 1$ für $\alpha = 1$, $c = 2$, $b = 1$.

48. Aufgabe. (Architekten.)

$0P_1$ und $0P_2$ sind zwei konjugierte Halbmesser einer Ellipse mit den Halbachsen a und b.



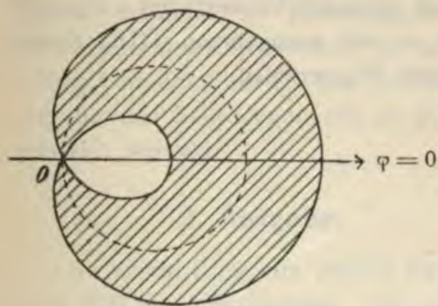
Figur 13.

1. Man beweise folgende Beziehungen zwischen den Koordinaten der Punkte P_1 und P_2:

$$x_2 = -\frac{a}{b} y_1, \quad y_2 = \frac{b}{a} x_1.$$

2. Durch P_1 wird eine Parallele P_1Q zu $0P_2$ gezogen und darauf $P_1Q = k \cdot 0P_2$ abgetragen. Welches ist der geometrische Ort des Punktes Q?

49. Aufgabe. (Architekten.)



Figur 14.

Die Gleichung

$$\rho = 2a \cos\varphi \pm a$$

stellt in Polarkoordinaten eine Kurve von beistehender Gestalt dar.

Für welche Werte des Polarwinkels wird der Polarradius gleich Null?

Wie sind die Tangenten in diesen Punkten gerichtet?

Wie groß ist die in beistehender Figur schraffierte Fläche?

50. Aufgabe. (Vermessungsingenieure.)

Die Koeffizienten a, b, c in der Parabelgleichung

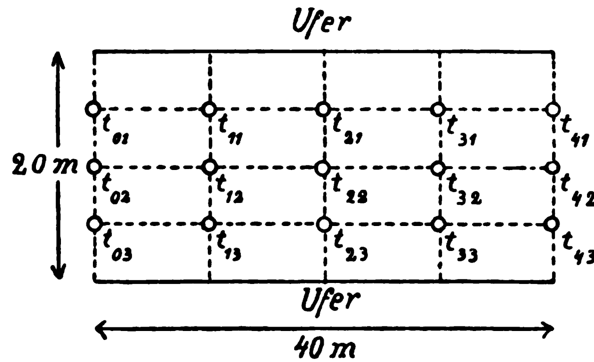
$$y = a + bx + cx^2$$

sind so zu bestimmen, dass

1. die Parabel durch den Punkt mit den Koordinaten x_1, y_1 hindurchgeht,
2. ihre Tangente in diesem Punkt den Winkel φ mit der positiven x-Achse einschliesst,
3. der Krümmungsradius in diesem Punkte den Wert r erhält.

51. Aufgabe. (Vermessungsingenieure.)

Ein Flußbett ist von parallelen, geradlinigen Ufern begrenzt. Die Tiefe des Wassers ist in fünf zu den Ufern senkrechten Querprofilen, die in Abständen von 10 m aufeinander folgen, gemessen worden. In jedem Profil wurden



Figur 15.

drei Lotungen in 5 m Abstand gemacht. Es soll mittels der Simpsonschen Regel eine Näherungsformel zur Berechnung der zwischen den äußersten Querprofilen enthaltenen Wassermenge aus den 15 geloteten Wassertiefen aufgestellt werden. An den Ufern ist die Wassertiefe zu Null anzunehmen. (Die Kreise bezeichnen Lotungsstellen, die t_{ik} die geloteten Wassertiefen.)

II. Technische Mechanik.

---

1. Aufgabe. (S.-S. 1901.) Page 63.

Ein Stab AB ist an beiden Enden gestützt und trägt zwei Lasten, von denen die eine P_1 vertikal gerichtet ist und 500 kg beträgt, während die andere P_2 horizontal und gleich 100 kg ist.

Man soll die Momentenfläche für das aus beiden Lasten resultierende Biegungsmoment konstruieren (also jene Fläche, deren Ordinaten die Größen des resultierenden Biegungsmomentes angeben, während die Richtung des zugehörigen Momentenvektors als gleichgültig betrachtet wird). Der Horizontalzug für das Seilpolygon soll zu 300 kg gewählt werden.

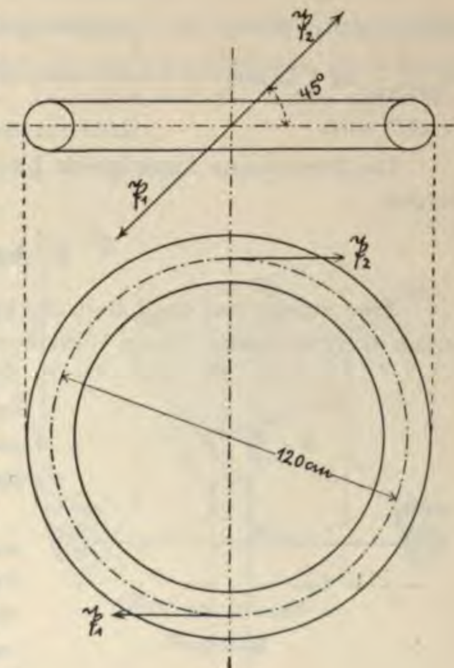


Figur 1.

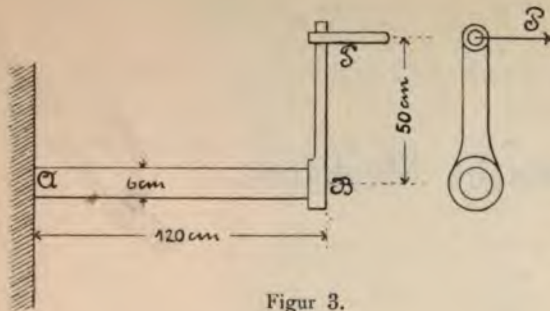
2. Aufgabe.

An einem Ring von 300 kg Gewicht und 120 cm Durchmesser, der vorher in Ruhe war, wirkt während $^1/_2$ Sekunde das Kräftepaar der Kräfte $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ (siehe Figur 2), von denen jede 20 kg ist.

Man soll ermitteln, um welche Achse der Ring in Drehung versetzt wird und wie groß die Winkelgeschwindigkeit ist, die er nach Ablauf der genannten Zeit erlangt hat, wenn der Winkel, den die Ebene des Kräftepaares mit der Ringebene bildet, gleich 45° ist. Der Ring ist vollständig frei und andere Kräfte als $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ wirken nicht auf ihn ein.



Figur 2.



Figur 3.

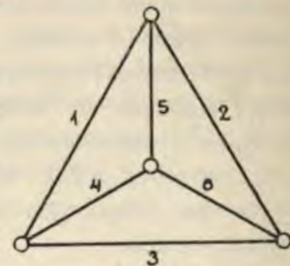
3. Aufgabe.

Auf eine Welle von kreisförmigem Querschnitt von 6 cm Durchmesser, die bei A festgehalten ist, wird am freien Ende B eine Kurbel aufgesteckt, an der eine Kraft von 40 kg angreift.

Man soll die im festen Querschnitt dadurch hervorgerufenen Biegungs- und Torsions-Spannungen und die der zusammengesetzten Beanspruchung entsprechende reduzierte Spannung an der gefährlichsten Stelle berechnen.

4. Aufgabe. (W.-S. 1902.)

Aus sechs Stäben, die alle gleichen Querschnitt von 50 cm² Fläche haben, ist ein Stabverband in Gestalt eines regelmäßigen Dreiecks mit einem in der Dreiecksmitte liegenden Knotenpunkte zusammengestellt. Der Stab 1 wird um 40° C. erwärmt.



Figur 4.

Wie groß sind die dadurch hervorgerufenen Spannungen, wenn der Ausdehnungs-Koeffizient $= \frac{1}{80000}$ für 1° C. und der Elastizitätsmodul $= 2 \cdot 10^6$ atm gesetzt wird.

Die Dreieckseite kann gleich 1 m angenommen werden.

5. Aufgabe.

Eine Stange von 1 m Länge und kreisförmigem Querschnitt von 4 cm Durchmesser trägt an beiden Enden Gewichte von je 100 kg. In der Mitte bei A ist die Stange an einem Maschinenteil befestigt, der eine zwischen B und C geradlinig hin- und hergehende Bewegung nach Art einer harmonischen Schwingung ausführt



Figur 5.

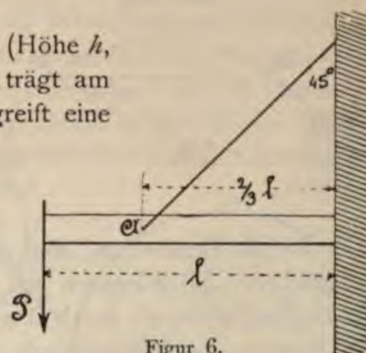
Wieviele Schwingungen darf der Maschinenteil in der Minute zurücklegen, ohne dass die durch die Trägheitskräfte der Gewichte hervorgerufene Biegungsbeanspruchung der Stange 1000 kg/cm² übersteigt? Der Schwingungsweg BC beträgt 60 cm. Ferner: Bei welcher Schwingungszahl in

der Minute wäre eine Resonanz zwischen der vorher behandelten Schwingung und der elastischen Schwingung zu befürchten, die die Gewichte infolge der elastischen Verbiegung der Stange ausführen können, wenn der Elastizitätsmodul gleich $2 \cdot 10^6$ atm gesetzt wird?

6. Aufgabe.

Ein Balken von rechteckigem Querschnitt (Höhe h, Breite b) ist am rechten Ende eingespannt und trägt am linken Ende eine Last P. Im Abstande $^2/_3\, l$ greift eine unter 45° geneigte Zugstange an, die als starr betrachtet werden kann.

Welche Zugkraft übt die Versteifungsstange aus, wenn der Elastizitätsmodul des Balkens mit E bezeichnet wird und nur der Einfluss der Biegungsmomente auf die Formänderung in der Rechnung berücksichtigt werden soll?

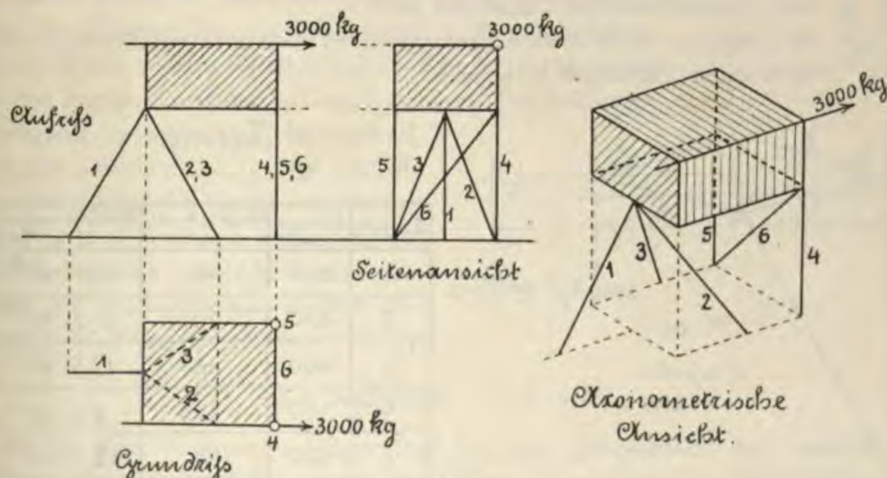


Figur 6.

7. Aufgabe. (S.-S. 1902.)

Eine Platte wird, wie in den untenstehenden Zeichnungen angegeben, durch 6 Stäbe 1, 2 . . . 6 gestützt. Längs der dort angegebenen Plattenkante greift eine horizontale Kraft von 3000 kg an. Man soll die durch sie in den 6 Stäben hervorgerufenen Stabspannungen berechnen.

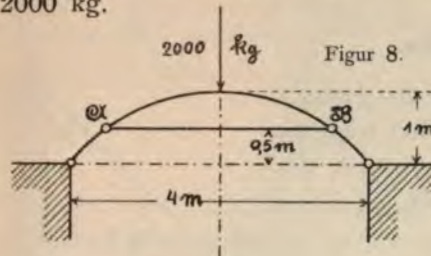
Als Kräftemaßstab ist 1 mm = 50 kg zu wählen.



Figur 7.

8. Aufgabe.

Ein Stab hat quadratischen Querschnitt von 12 cm Seitenlänge und ei gekrümmte Mittellinie von 4 m Spannweite und 1 m Pfeilhöhe. Er wird a elastischer Bogenträger aufgestellt und trägt eine Einzellast in der Mitte v 2000 kg.



Figur 8.

a) Wie groß ist in diesem Falle d Horizontalschub?

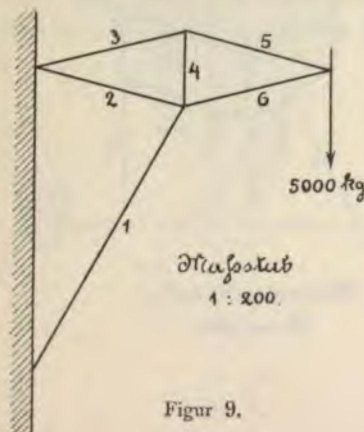
b) Wie groß wird der Horizontalschu wenn die beiden Punkte A und (siehe Fig. 8) durch eine Verstärkung stange von 20 cm² Querschnitt a dem gleichen Material wie der Boge träger verbunden werden?

Bei der Bearbeitung sind die in solchen Fällen üblichen Vernachlässigunge zu machen. Insbesondere soll die Mittellinie als eine Parabel angesehen u das Bogenelement ds durch das Abszissenelement dx ersetzt werden. Ferner i der Einfluss der Normalkraft im Bogen auf die Formänderung zu vernac lässigen und nur der Einfluss des Biegungsmoments zu berücksichtigen. B Frage a) ist die Zahlenrechnung vollständig durchzuführen; bei Frage b) wi nur der Ansatz und nicht die vollständige Ausrechnung verlangt.

9. Aufgabe. (W.-S. 1903.)

Ein an einer Wand befestigter Kragträger (Figur 9) trägt am freien En eine Last von 5000 kg. Man soll

1. die Stabspannungen ermitteln,
2. den Verschiebungsplan zeichnen und
3. die Senkung des belasteten Knotenpunktes auch noch nach dem Maxwe Mohrschen Verfahren berechnen.



Figur 9.

Tabelle.

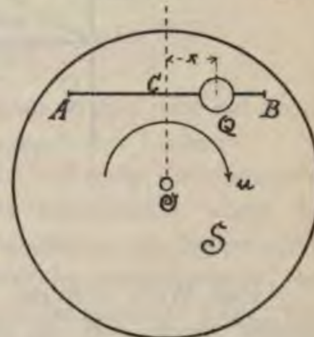
Stab Nr.	Länge cm	Querschnitt cm²	Stabkonstante r (cm/kg)
1	800	40	$10{,}0 \cdot 10^{-6}$
2	400	20	$10{,}0 \cdot 10^{-6}$
3	400	16	$12{,}5 \cdot 10^{-6}$
4	200	12,5	$8{,}0 \cdot 10^{-6}$
5	400	16	$12{,}5 \cdot 10^{-6}$
6	400	25	$8{,}0 \cdot 10^{-6}$

Die Stabquerschnitte, Stablängen und Stabkonstanten r sind in Tabelle auf Seite 26 zusammengestellt. Für den Kräfteplan ist der Maßstab 1 mm = 100 kg zu wählen und im Verschiebungsplane sind die Längenänderungen in zehnfacher Vergrößerung aufzutragen.

10. Aufgabe.

Auf einer Scheibe S, die sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit u um die durch den Scheibenmittelpunkt O senkrecht zur Scheibenebene gehende Achse dreht, ist eine Führungsstange AB befestigt, längs deren sich ein als materieller Punkt aufzufassender Körper vom Gewichte Q reibungsfrei zu verschieben vermag. Der Körper Q ist durch eine Feder gehalten, die ihn bei einem Ausschlage x nach der Stangenmitte C mit einer elastischen Kraft von der Grösse cx zurückzieht. Wenn der Körper Q einen Anstoß aus der Gleichgewichtslage C erhalten hat, führt er Schwingungen relativ zur rotierenden Scheibe aus.

Man soll die Ergänzungskräfte der Relativbewegung angeben, die Differentialgleichung für die Schwingungsbewegung aufstellen und die Schwingungsdauer berechnen. Unter welcher Grösse muß die Winkelgeschwindigkeit u liegen, damit Q solche Schwingungen überhaupt auszuführen vermag?

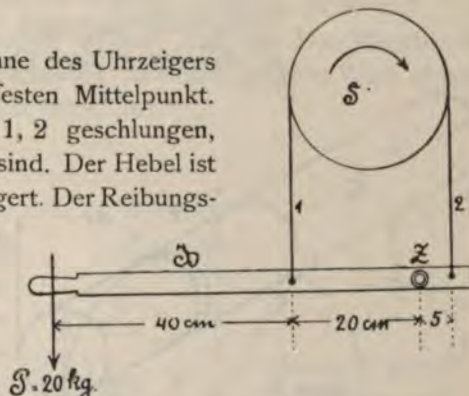


Figur 10.

11. Aufgabe.

Eine Scheibe S dreht sich im Sinne des Uhrzeigers um ihren gegen ein Maschinengestell festen Mittelpunkt. Um die Scheibe ist ein Bremsband 1, 2 geschlungen, dessen Enden an dem Hebel H befestigt sind. Der Hebel ist um den Zapfen Z drehbar im Gestell gelagert. Der Reibungskoeffizient zwischen dem Bremsband und dem Scheibenumfang ist gleich 0,3.

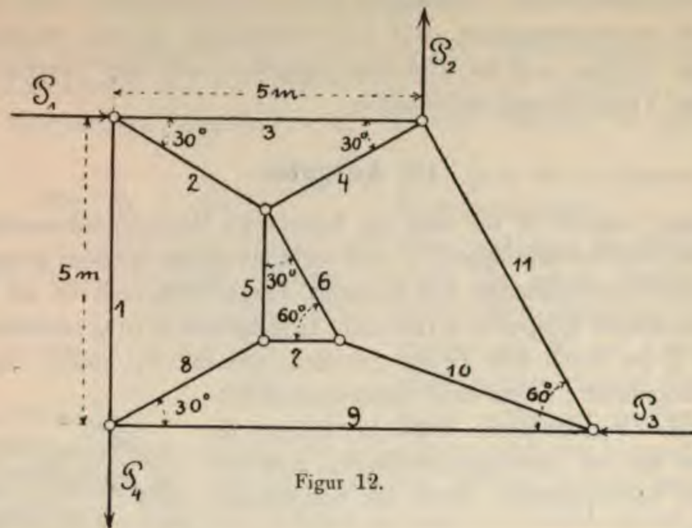
Wie groß ist die Spannung der Bänder 1, 2 und wie groß die am Scheibenumfang wirkende Bremskraft, wenn am Handgriff des Hebels die Kraft $P = 20$ kg angreift?



Figur 11.

12. Aufgabe. (S.-S. 1903.)

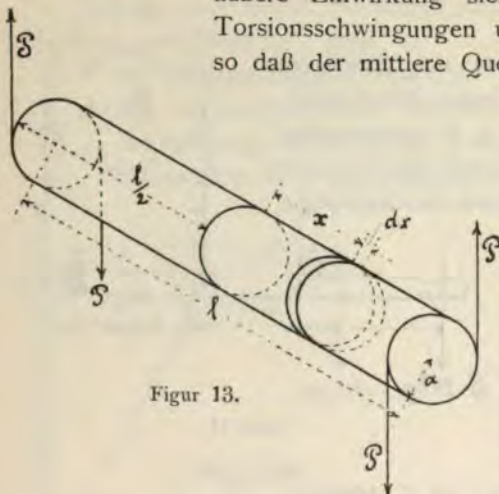
An dem Fachwerke (Figur 12), das eine geometrisch und statisch bestimmte Grundfigur bildet, greifen die Lasten $P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = 100$ kg an. Man soll die Stabspannungen berechnen.



Figur 12.

13. Aufgabe.

Eine Welle von der Länge l und dem Querschnittshalbmesser a ist anfänglich durch zwei an den Enden angebrachte Kräftepaare PP verdreht. Dann werden beide Kräftepaare plötzlich entfernt und die Welle wird ohne äußere Einwirkung sich selbst überlassen. Sie führt dann Torsionsschwingungen um die Gleichgewichtslage herum aus, so daß der mittlere Querschnitt in Ruhe bleibt. Der Winkel, um den der im Abstande x von der Mitte befindliche Querschnitt zu irgend einer Zeit t gegen den mittleren verdreht ist, sei mit φ bezeichnet; dann ist φ eine Funktion von x und t.



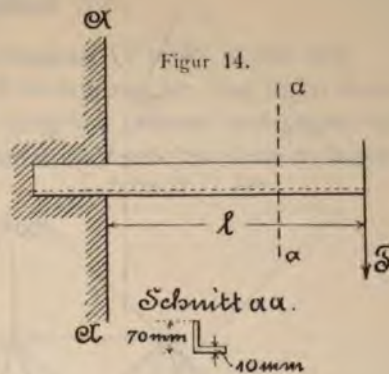
Figur 13.

Man soll die Differentialgleichung der Schwingung aufstellen, der φ genügen muß, indem man die Bewegungsgleichung für ein zwischen den Querschnitten x und $x + dx$ gelegenes Wellenelement anschreibt. Eine partikuläre Lösung der Gleichung ist von der Form $\varphi = A \sin \alpha x \sin \beta t$. Welche Bedingung muß hierbei zwischen den Konstanten α und β erfüllt sein? Der Schubelastizitätsmodul ist mit G, das Gewicht der ganzen Welle mit Q zu bezeichnen.

14. Aufgabe.

Ein Winkeleisen von 70 mm Schenkellänge und 10 mm Schenkelstärke ist in eine Wand AA eingemauert und trägt an dem um $l = 50$ cm vorkragenden Ende eine Last $P = 100$ kg.

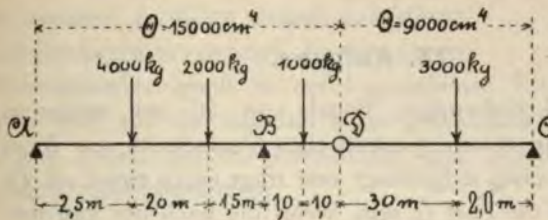
Man soll die dadurch hervorgebrachte Biegungsbeanspruchung berechnen, ferner auch angeben, in welcher Richtung die Durchbiegung erfolgt. Der eine Schenkel steht lotrecht, der andere wagrecht.



Figur 14.

15. Aufgabe. (W.-S. 1904.)

Ein Gerberscher Gelenkträger ruht auf den Stützen A, B, C und hat bei D ein Mittelgelenk. Er trägt die in der Zeichnung angegebenen Lasten.

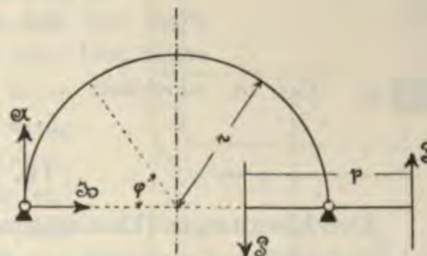


Figur 15.

Man soll zuerst die Momentenfläche konstruieren, wobei der Horizontalzug des Seilpolygons zu 3000 kg anzunehmen ist, und hierauf die elastische Linie. Von A bis D ist das Trägheitsmoment des Querschnitts $\Theta = 15000$, von D bis C gleich 9000 cm⁴. Die Verzerrung der elastischen Linie ist so zu wählen, daß die Durchbiegungen im Vierfachen der natürlichen Grösse erscheinen. Welchen größten Wert nimmt die Durchbiegung auf der Strecke von D bis C an?

16. Aufgabe.

Ein Bogenträger von halbkreisförmiger Gestalt und konstantem Trägheitsmoment Θ ist an den Enden in Gelenken gelagert. Am rechten Bogenende ist in radialer Richtung eine Stange angebracht, an der ein Kräftepaar $P \cdot p$ angreift. Durch die Stange wird diese Belastung auf den Bogen übertragen.

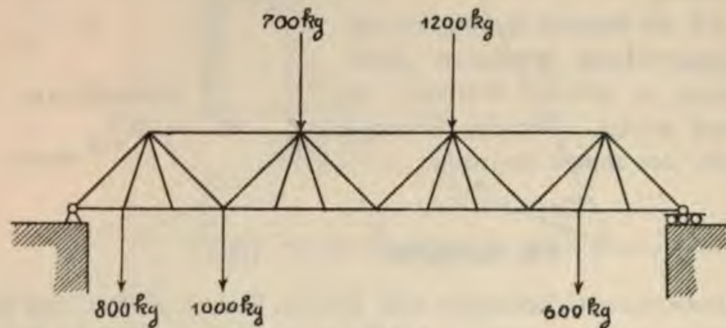


Figur 16.

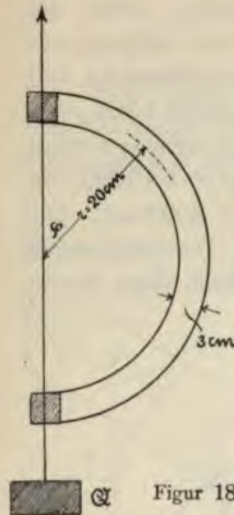
Man soll die Komponenten A und H des Auflagedrucks am linken Trägerende berechnen. Außerdem soll noch jener Winkel φ (siehe Zeichnung) berechnet werden, für den das Biegungsmoment zu Null wird.

17. Aufgabe. (S.-S. 1904.)

Für den in Figur 17 dargestellten Balkenträger, der die dort eingetragenen Lasten trägt, soll ein reziproker Kräfteplan gezeichnet und hiernach für jeden Stab angegeben werden, wie groß die in ihm auftretende Spannung ist, wobei namentlich auch auf das Vorzeichen der Stabspannung sorgfältig zu achten ist.



Figur 17.



Figur 18.

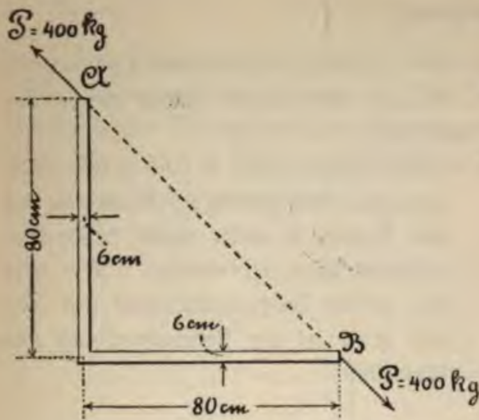
18. Aufgabe.

Ein halbkreisförmiger Bügel von 20 cm mittlerem Halbmesser und einem quadratischen Querschnitt von 3 cm Seitenlänge ist oben aufgehängt und trägt unten eine Last Q. Wie groß darf die Last Q sein, wenn die nach der gewöhnlichen Formel berechnete Materialbeanspruchung 1000 atm nicht überschreiten soll? Um wieviel senkt sich der Aufhängepunkt der Last infolge der elastischen Formänderung des Bügels, wenn die Last aufgebracht wird? Wie groß ist die Schwingungsdauer der harmonischen Schwingung, die Q wegen der Federung des Bügels auszuführen vermag, wenn man ihm einen kleinen Stoß in vertikaler Richtung erteilt hat? Der Elastizitätsmodul ist gleich $2 \cdot 10^6$ atm anzunehmen.

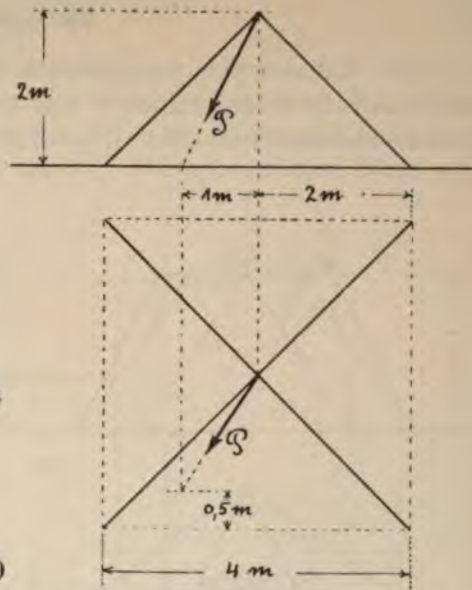
19. Aufgabe.

Zwei Eisenstangen (Elastizitätsmodul gleich 2000000 atm) von 80 cm Länge und quadratischem Querschnitt von 6 cm Seite sind an zwei Enden rechtwinklig zueinander fest miteinander verbunden. An beiden Enden des dadurch gebildeten Rahmens greifen zwei Kräfte P von 400 kg an. (Siehe Figur 19.)

Man soll berechnen, um wieviel der Rahmen infolge dieser Belastung auseinander federt, d. h. um wieviel sich der Abstand der Punkte A und B vergrößert.



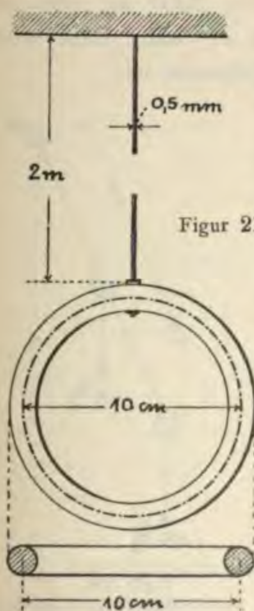
Figur 19.



Figur 20.

20. Aufgabe. (W.-S. 1905.)

Vier Stäbe sind, wie aus Figur 20 zu ersehen, zu einem statisch unbestimmten Bockgerüste vereinigt. An dem oberen Knotenpunkte greift in der angegebenen Richtung eine Last P von 1000 kg an. Man soll die dadurch hervorgebrachten Stabspannungen berechnen. Alle Stäbe haben gleiche Querschnitte und gleichen Elastizitätsmodul, daher auch gleiche Stabkonstanten.

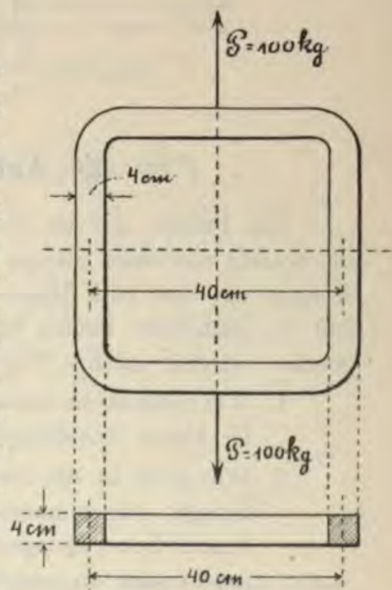


Figur 21.

21. Aufgabe.

An einem Stahldrahte von 0,5 mm Dicke und 2 m Länge (Schub-Elastizitätsmodul $G = 800000$ atm) ist ein Ring von 2 kg Gewicht und 10 cm mittlerem Durchmesser aufgehängt. (Fig. 21.) Wenn man den Ring ein wenig um den lotrechten Durchmesser dreht und ihn hierauf losläßt, führt er unter dem Einflusse der Torsion des Drahtes Schwingungen aus.

Man soll deren Schwingungsdauer berechnen.

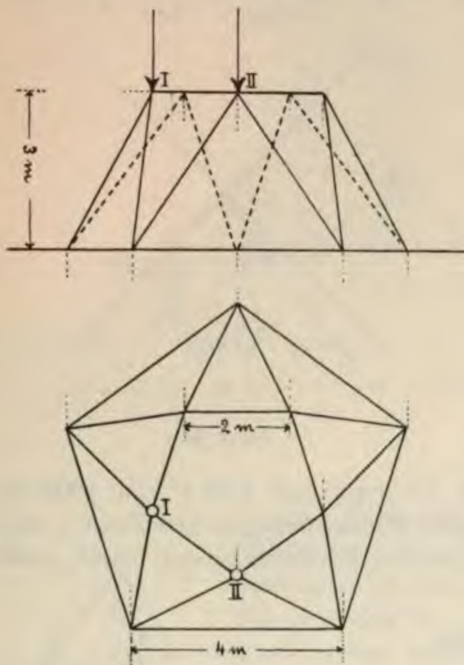


Figur 22.

22. Aufgabe.

Ein Rahmen von quadratischem Umriss und quadratischem Querschnitt wird durch die beiden Lasten P von je 100 kg, die in zwei Seiten mitten angreifen, auseinandergezogen. (Figur 22 Seite 29.)

Die Maße sind in die Figur eingetragen; die geringe Abrundung an den Ecken braucht nicht besonders berücksichtigt zu werden. Wo tritt das größte Biegungsmoment auf und wie groß ist die Beanspruchung des Materials?



Figur 23.

23. Aufgabe. (S.-S. 1905.)

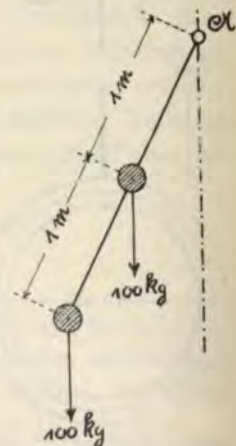
Man soll die Stabspannungen berechnen, die in einer regelmäßig fünfseitigen Netzwerkkuppel von den in Figur 23 angegebenen Abmessungen auftreten:

1. für den Fall, daß nur Knotenpunkt I eine Last von 1000 kg trägt;
2. für den Fall, daß an Knotenpunkt I eine Last von 2000 kg und an Knotenpunkt II eine Last von 3000 kg angebracht ist.

24. Aufgabe.

Ein Pendel, das im Punkte A drehbar aufgehängt ist, besteht aus einer Stange, deren Gewicht zu vernachlässigen ist, und zwei Massen, die darauf befestigt sind und als materielle Punkte von je 100 kg Gewicht angesehen werden sollen. (Fig. 24.)

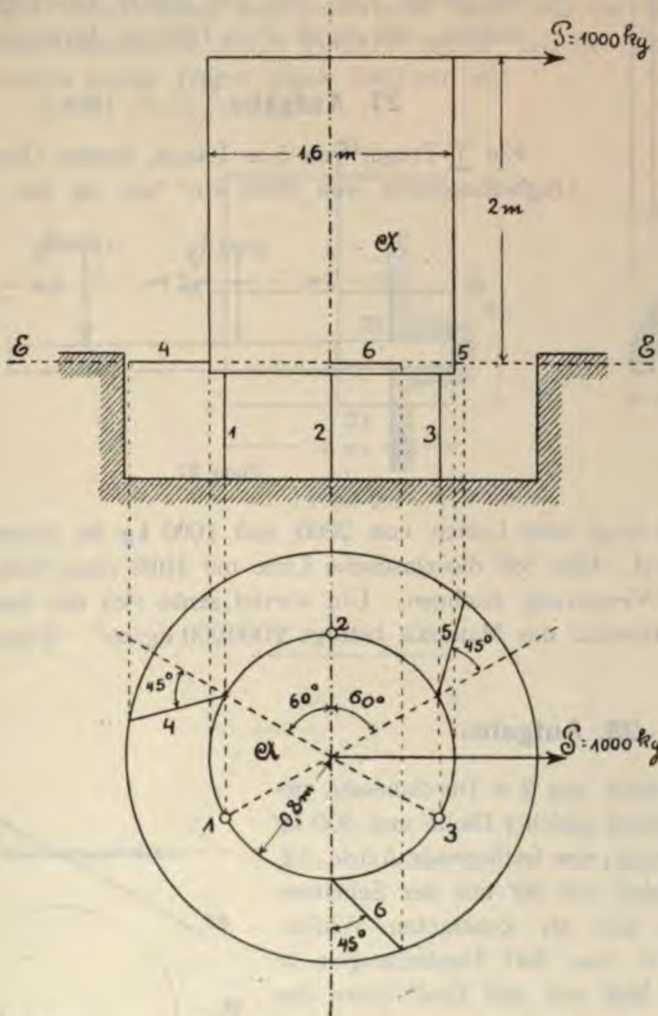
1. Wie groß ist die Schwingungsdauer dieses Pendels für kleine Ausschläge?
2. Wie groß ist das Biegungsmoment, das von der Stange aufgenommen werden muß, wenn das Pendel Schwingungen mit Ausschlägen $\alpha = 30^{\circ}$ macht und an welcher Stelle tritt die grösste Biegungsbeanspruchung der Stange auf?



Figur 24.

25. Aufgabe. (W.-S. 1906.)

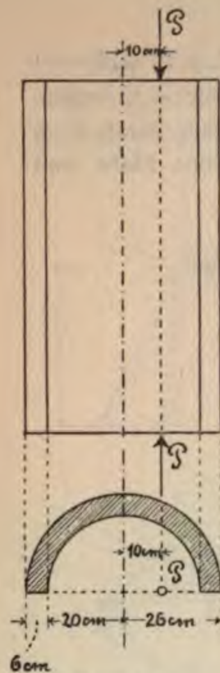
Ein Zylinder A ist durch 6 Stäbe gestützt, von denen 1, 2, 3 senkrecht stehen, während die übrigen 4, 5, 6 in einer horizontalen Ebene EE liegen. Man soll die Stabspannungen berechnen, die durch die horizontale Kraft $P = 1000$ kg in den 6 Stäben hervorgerufen werden. Die erforderlichen Maße sind aus Figur 25 zu entnehmen.



Figur 25.

26. Aufgabe.

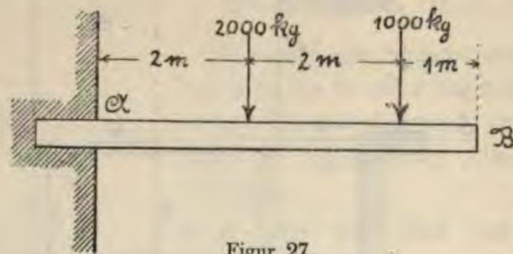
Ein Stab von halbringförmigem Querschnitte ist einer exzentrischen Druckbelastung ausgesetzt, wie in Figur 26 angegeben.


Figur 26.

Man soll
1. den Schwerpunkt des Querschnittes,
2. die Trägheitsmomente für die Hauptachsen ermitteln,
3. die Lage der Nullinie angeben, die zu dem aus de Grundrisse ersichtlichen Angriffspunkte der Kraft gehört, und endlich
4. die größte Zug- und die größte Druckspannung b rechnen, die durch $P = 1000$ kg hervorgerufen wir

27. Aufgabe. (S.-S. 1906.)

Ein ⊥-Träger von 5 m Länge, dessen Querschnitt e Trägheitsmoment von 8000 cm⁴ hat, ist bei A fest ei



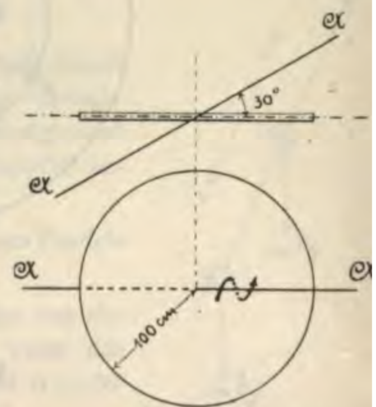
Figur 27.

gespannt und trägt zwei Lasten von 2000 und 1000 kg im Abstande von und 4 m von A. Man soll die elastische Linie mit Hilfe eines Seilpolygons hundertfacher Verzerrung zeichnen. Um wieviel senkt sich das freie Ende Der Elastizitätsmodul des Materials beträgt 2000000 kg/cm². (Figur 27.)

28. Aufgabe.

Eine Scheibe von 2 m Durchmesser, geringer und überall gleicher Dicke und 300 kg Gewicht rotiert um eine festliegende Achse AA, die einen Winkel von 30° mit der Scheibenebene bildet, mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit von 300 Umdrehungen in der Minute. Man soll den Drall (oder das statische Moment der Bewegungsgröße) der Größe und der Richtung nach angeben. (Fig. 28.)

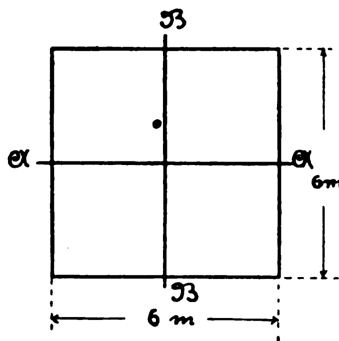
Wie groß ist ferner das statische Moment des Kräftepaares, das von den Lagern aufgenommen werden muß, um die verlangte Bewegung zu erzwingen?



Figur 28.

29. Aufgabe.

Ein quadratischer Raum von 6 m Seitenlänge wird, wie der beistehende Grundriss angibt, von zwei sich in der Mitte kreuzenden Trägern *AA* und *BB* überdeckt. Der Träger *AA* ist an den Enden frei aufgelagert, der Träger *BB* dagegen ist an den Enden eingespannt. An der Kreuzungsstelle in der Mitte wird eine Last von 1000 kg aufgebracht. Wieviel davon wird von jedem der beiden Träger aufgenommen und um wieviel senkt sich die belastete Stelle, wenn der Elastizitätsmodul gleich 2000000 kg/cm^2 und das Trägheitsmoment des Querschnitts beider Träger gleich 7000 cm^4 ist?



Figur 29.

III. Darstellende Geometrie.*)

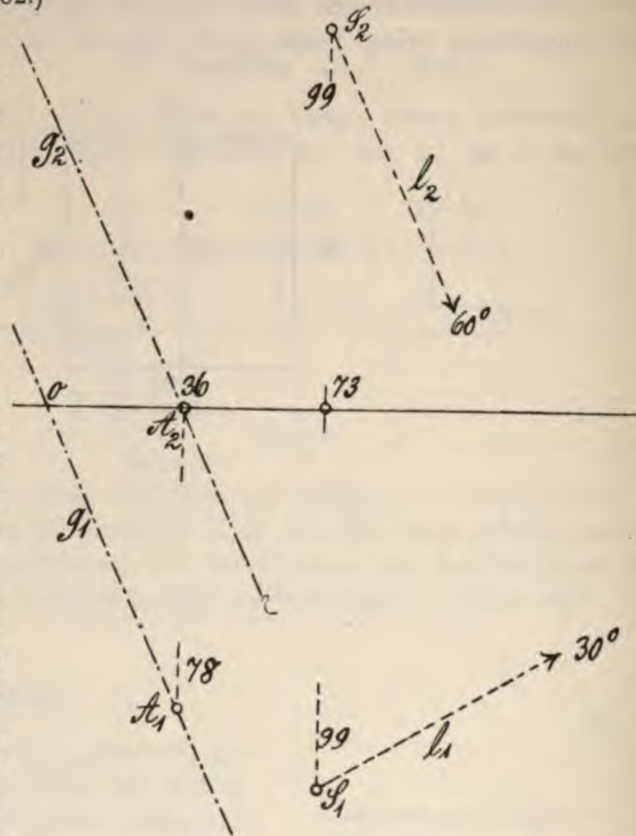
1. Aufgabe. (W.-S. 1902.)

Darstellung einer schräggestellten regulären fünfseitigen Pyramide mit einem ebenen Schnitt derselben in senkrechter Projektion nebst Konstruktion der wahren Größe des Schnittes sowie der Abwicklung und der Schatten.

Von der Pyramide ist eine Basisecke durch A_1, A_2 und die Spitze durch S_1, S_2 gegeben; ferner ist eine Gerade durch $A_1 g_1$, $A_2 g_2$ gegeben, auf welcher der Basismittelpunkt liegen soll.

Die Schnittebene soll durch die Grundrißspur der Basisebene gehen und nach der Basis gewendet von der Spitze einen senkrechten Abstand haben, der gleich $^3/_4$ der Pyramidenhöhe ist.

Die Lichtrichtung ist durch l_1, l_2 gegeben.



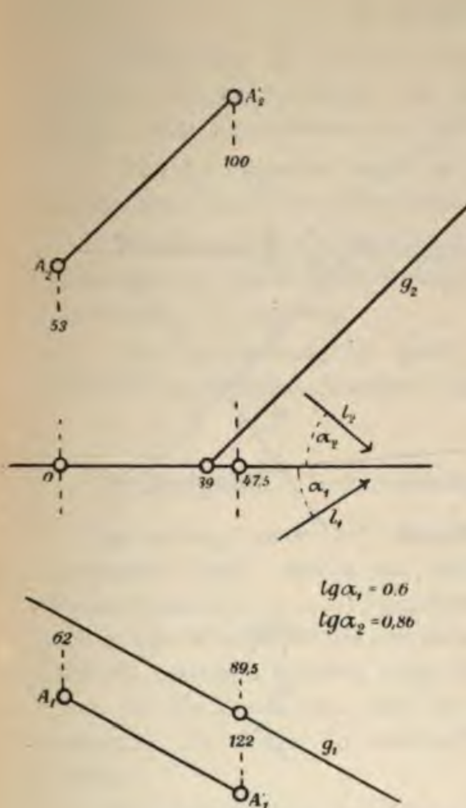
Figur 1.

2. Aufgabe. (Kulturingenieure.)

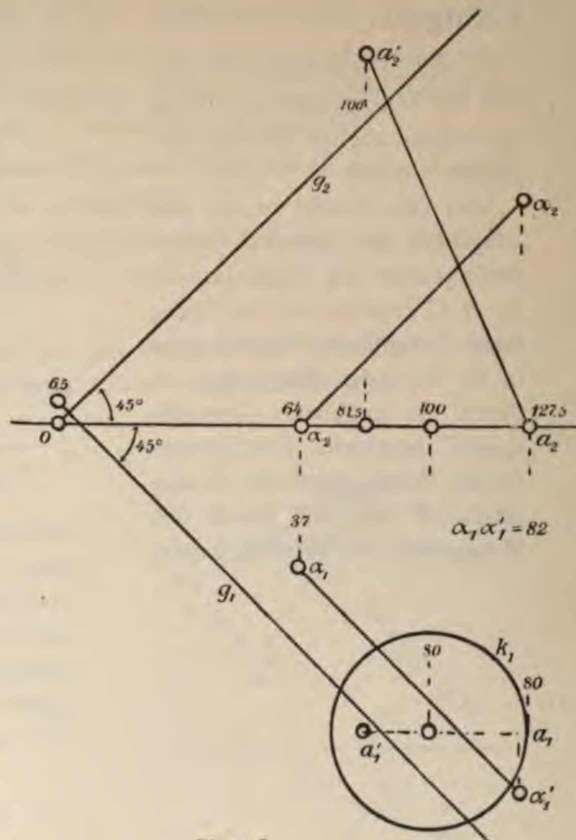
Darstellung eines schräggestellten sechsseitigen Prisma in senkrechter Projektion nebst Konstruktion der Schatten.

Von dem Prisma ist die eine Längsseite durch $A_1 A_1'$, $A_2 A_2'$ gegeben und die derselben gegenüberliegende Längsseite soll sich in der durch $g_1 g_2$ gegebenen Geraden befinden. (Figur 2.)

*) Die Ziffern in den Lagenbeziehungen geben die Originalgrößen in mm an.



Figur 2.



Figur 3.

3. Aufgabe. (S.-S. 1902.)

Darstellung der Durchdringung eines auf dem Grundriß stehenden schiefen Kreiszylinders und eines schräggestellten regulären dreiseitigen Prisma nebst Konstruktion der Abwicklungen.

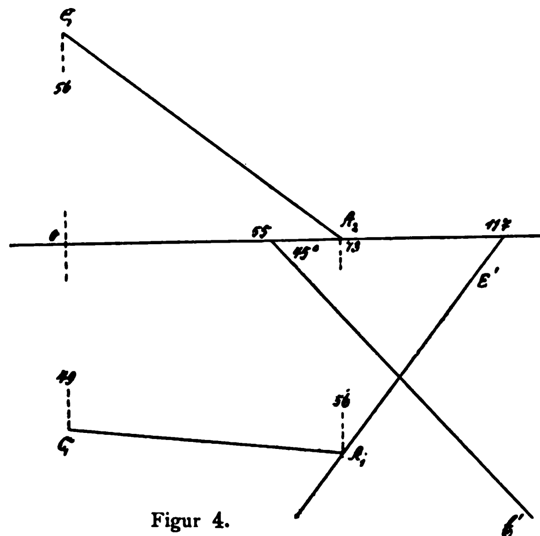
Der schiefe Kreiszylinder ist durch den im Grundriss liegenden Basiskreis k_1 und durch die Projektionen $a_1 a_1'$, $a_2 a_2'$ einer Mantellinie bestimmt, von denen $a_1 a_1'$ parallel zur Projektionsachse ist.

Von dem regulären dreiseitigen Prisma sind die Projektionen $\alpha_1 \alpha_1'$, $\alpha_2 \alpha_2'$ einer Längskante, sowie die Projektionen g_1, g_2 einer Geraden gegeben, in welcher sich eine zweite Längskante befindet, und diese beiden Längskanten des Prismas schneiden die gegebene Mantellinie $a a'$ des schiefen Kreiszylinders. Die dritte Längskante soll nach vorn, also vor der Ebene $g \alpha \alpha'$ liegen. Dadurch ist die Lage und Größe des gleichseitigen Basisdreiecks bestimmt, auf dessen Ebene die Längskanten senkrecht stehen. (Figur 3.)

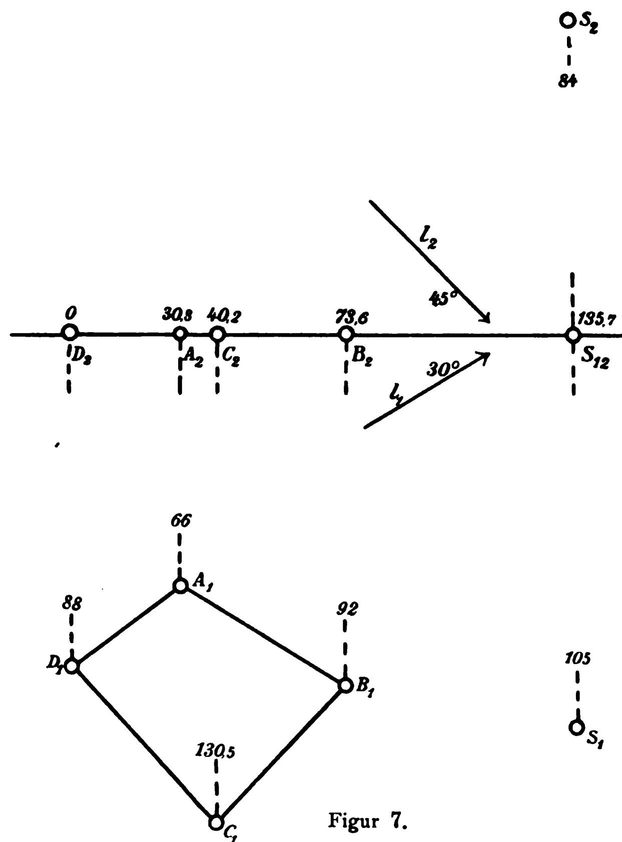
4. Aufgabe. (Kulturingenieure.)

Es soll in senkrechter Projektion ein schräggestellter Würfel mit einem ebenen Schnitt dargestellt werden.

Von dem Würfel ist die eine Diagonale der unteren Seitenfläche durch die Projektion $A_1 C_1$, $A_2 C_2$ gegeben und die Ebene dieser Seitenfläche ist durch diese in ihr liegenden Diagonale und durch die gegebene Grundrißspur E' bestimmt. Die Schnittebene, deren gegebene Grundrißspur $\mathfrak{E}'$ ist, soll durch den Mittelpunkt des Würfels gehen.



Figur 4.



Figur 7.

5. Aufgabe. (W.-S. 1903.)

Darstellung der Durchdringung einer auf dem Grundriß stehenden vierseitigen schiefen Pyramide und eines auf dem Grundriß liegenden Rotationskegels nebst Konstruktion der Schatten in senkrechter Projektion.

Von der Pyramide ist das im Grundriß liegende Basisviereck $a_1 b_1 c_1 d_1$ sowie die Spitze s durch ihre Projektionen s_1, s_2 gegeben.

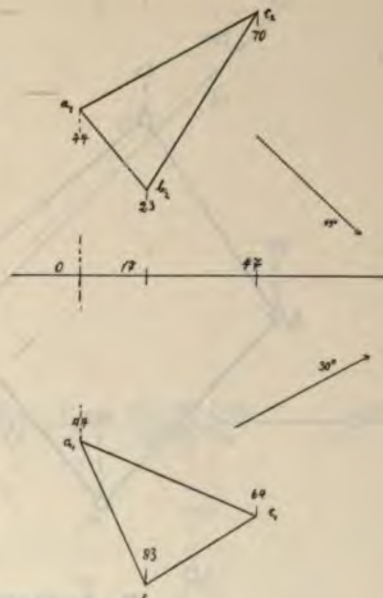
Der Basiskreis des Rotationskegels soll in der Seitenfläche $b c s$ der Pyramide liegen und die Spitze σ_1 des Rotationskegels ist im Grundriß auf der verlängerten Basiskante $c_1 d_1$ gegeben.

Die Lichtrichtung ist durch den von der Spitze s der Pyramide auf den Grundriß geworfenen Schatten s_s gegeben. (Siehe Figur 5 Seite 40.)

6. Aufgabe. (Kulturingenieure.)

Darstellung einer auf dem Grundriß liegenden Kugel, welche ein durch seine Projektionen $a_1 b_1 c_1$, $a_2 b_2 c_2$ gegebenes Dreieck in dem Mittelpunkt des umgeschriebenen Kreises unterhalb berührt, nebst Konstruktion des Selbstschattens und des Schlagschattens der Kugel in senkrechter Projektion.

Die Lichtrichtung ist durch die Projektionen l_1, l_2 gegeben. (Figur 6.)



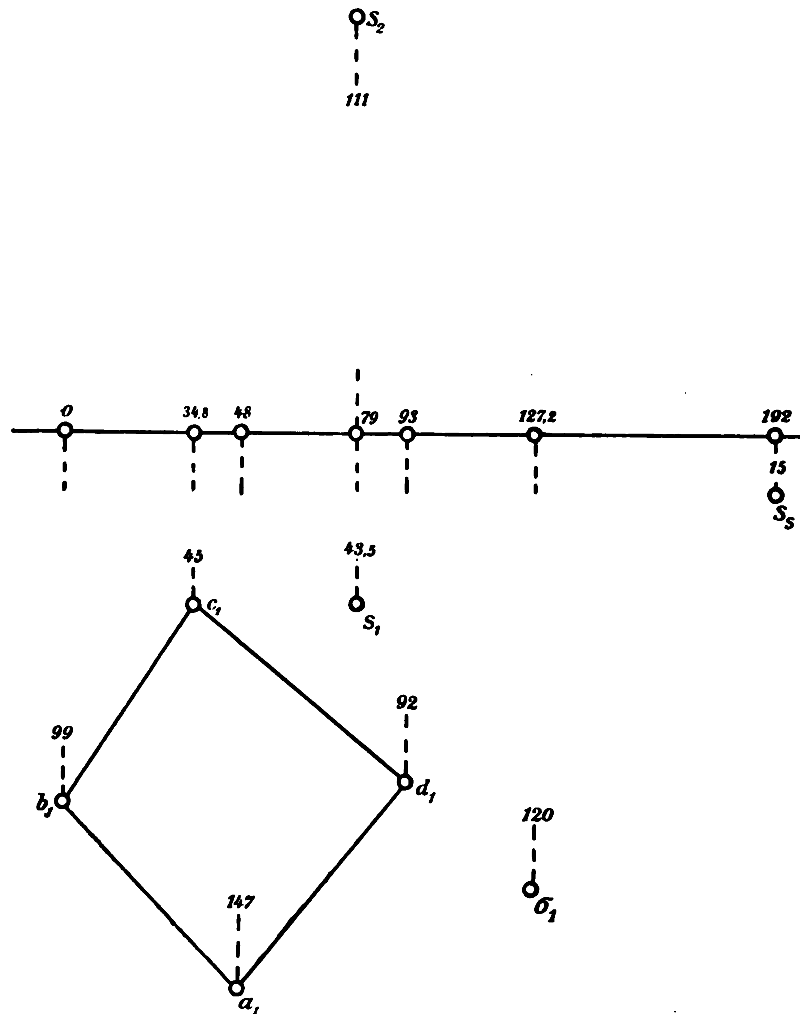
Figur 6.

7. Aufgabe. (S.-S. 1903.)

Darstellung der Durchdringung einer auf dem Grundriß stehenden vierseitigen schiefen Pyramide und eines auf dem Grundriß stehenden schiefen Kreiszylinders nebst Konstruktion der Schatten in senkrechter Projektion.

Die schiefe Pyramide ist durch ihre Grundfläche $A_1 B_1 C_1 D_1$ und durch die Projektion S_1, S_2 ihre Spitze gegeben

Der darzustellende schiefe Kreiszylinder ist durch folgende Bedingungen bestimmt. Die Achse des schiefen Kreiszylinders, d. h. die Verbindungslinie der Mittelpunkte der beiden Basiskreise, soll in der Seitenfläche ABS der schiefen Pyramide liegen und in der Mitte auf der Kante AS senkrecht stehen; ferner soll die Kante CS den schiefen Kreiszylinder berühren und seine Höhe soll gleich der Höhe $S_{12} S_2$ der schiefen Pyramide sein. (Siehe Figur 7 Seite 38.)



Figur 5.

8. Aufgabe. (Kulturingenieure.)

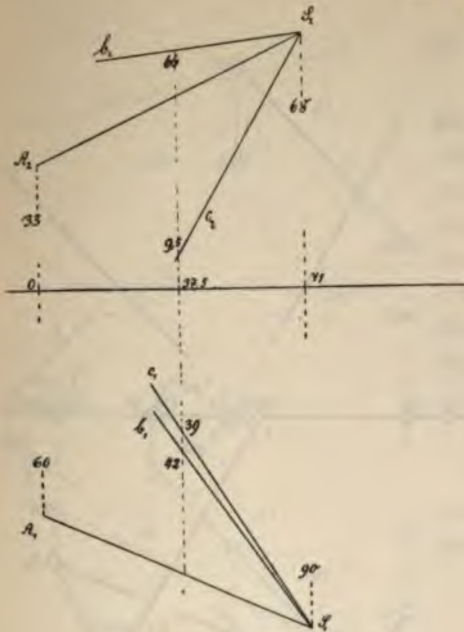
In senkrechter Projektion soll ein Rotationskegel dargestellt werden, von welchem die Lage und Größe einer Mantellinie durch die Projektionen $S_1 A_1$, $S_2 A_2$ bestimmt ist und die Lage zweier Mantellinien durch die Projektionen $S_1 b_1$, $S_2 b_2$ und $S_1 c_1$, $S_2 c_2$ gegeben sind. (Figur 8.)

9. Aufgabe. (W.-S. 1904.)

Darstellung der Durchdringung einer auf dem Grundriß stehenden vierseitigen Pyramide und eines schräggestellten vierseitigen Prisma in senkrechter Projektion.

Von der Pyramide ist die Basis $A_1 B_1 C_1 D_1$ und die Spitze S_1, S_2 gegeben.

Von dem Prisma ist die eine im Grundriß liegende Ecke a_1 der quadratischen Basis gegeben. Die dieser Ecke gegenüberliegende Längskante soll sich in der Geraden g_1, g_2 befinden und die Länge derselben gleich der Höhe S_{12} S_2 der Pyramide sein. (Fig. 9.)



Figur 8.

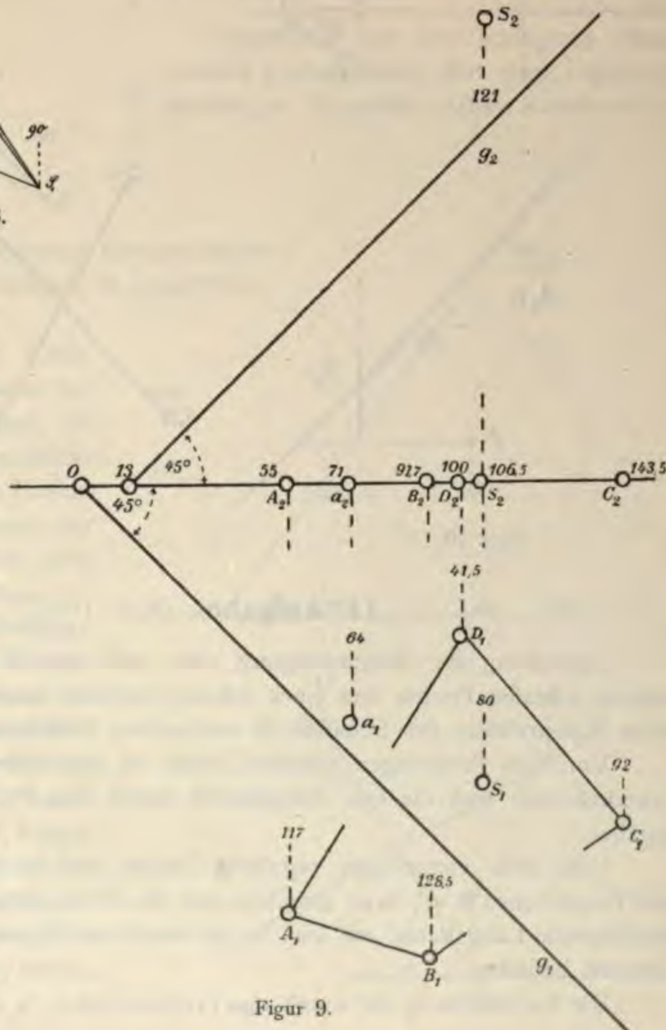
10. Aufgabe.

(Vermessungs- und Kulturingenieure.)

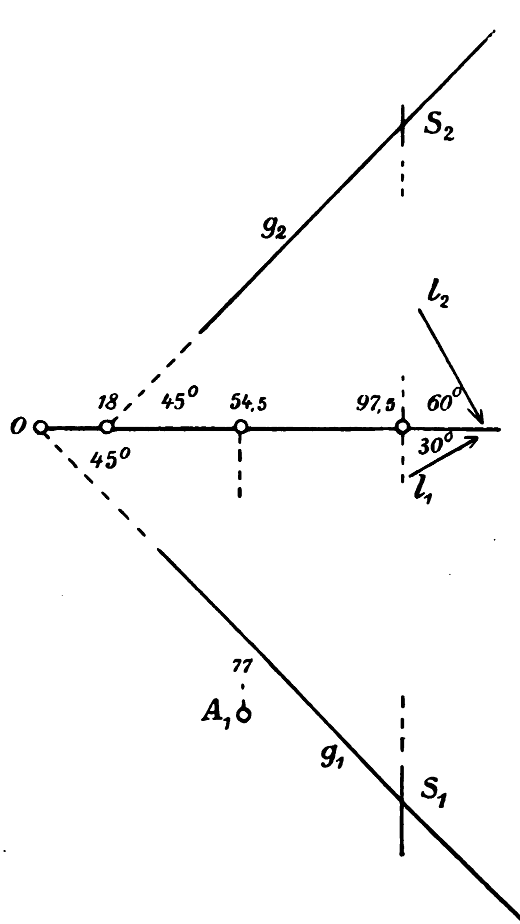
Darstellung einer vierseitigen regulären Pyramide und Konstruktion der Schatten in senkrechter Projektion.

Von der Pyramide ist eine im Grundriß liegende Ecke A_1 der quadratischen Basis u. die Spitze durch ihre Projektionen S_1, S_2 gegeben; ferner soll die Höhe der Pyramide in der durch ihre Projektionen g_1, g_2 gegebenen Geraden liegen.

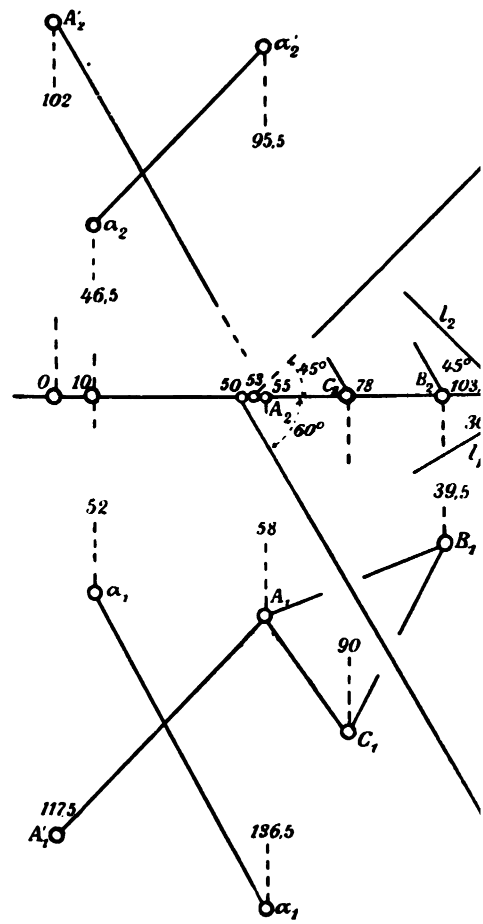
Die Lichtrichtung ist durch die Projektionen l_1, l_2 gegeben. (Fig. 10.)



Figur 9.



Figur 10.



Figur 11.

11. Aufgabe. (S.-S. 1904.)

Darstellung der Durchdringung eines auf dem Grundriß stehènden dre seitigen schiefen Prisma und eines schräggestellten vierseitigen regulären Prisn nebst Konstruktion der Schatten in senkrechter Projektion.

Von dem dreiseitigen schiefen Prisma ist das Basisdreieck $A_1 B_1 C_1$ in d Grundrißebene und die eine Längskante durch ihre Projektionen $A_1 A_1'$, $A_2 A$ gegeben.

Von dem vierseitigen regulären Prisma ist die eine Längskante durc ihre Projektionen $\alpha_1 \alpha_1'$, $\alpha_2 \alpha_2'$ gegeben und die dieser Längskante diagonal gege überliegende Längskante soll sich in der durch die Projektionen g_1, g_2 gegebene Geraden befinden.

Die Lichtrichtung ist durch die Projektionen l_1, l_2 gegeben. (Figur 11.)



Figur 12.

12. Aufgabe. (Kulturingenieure.)

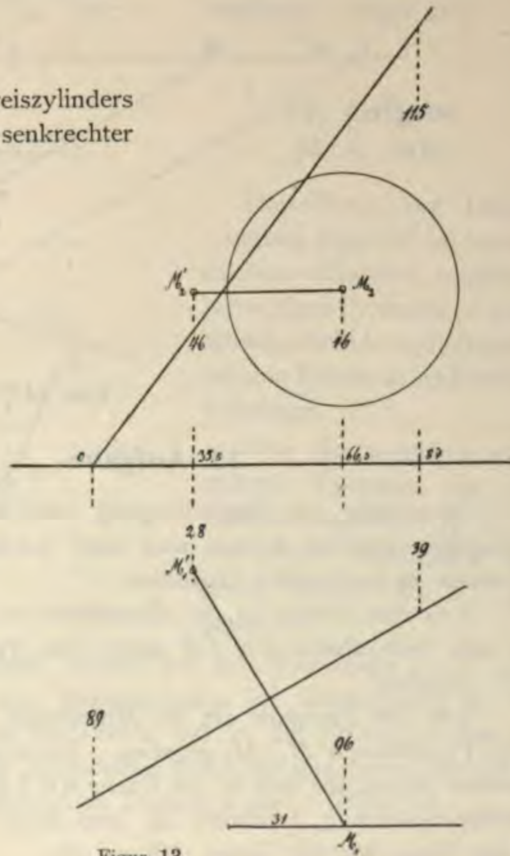
Darstellung eines schräggestellten Rotationskegels, dessen Basiskreis die Grundrißebene berührt. Vom Rotationskegel ist die Spitze durch ihre Projektionen S_1 S_2 und in der Grundrißebene der Berührungspunkt A_1 des Basiskreises gegeben. Ferner soll eine Mantellinie in der durch die Projektionen $S_1 g_1$ und S_2, g_2 gegebenen Geraden liegen. (Figur 12.)

13. Aufgabe. (W.-S. 1905.)

Darstellung der Durchdringung eines schiefen Kreiszylinders und einer regulären dreiseitigen Pyramide nebst Konstruktion der Abwicklung des schiefen Kreiszylinders mit den Durchdringungskurven in senkrechter Projektion.

Von dem schiefen Kreiszylinder, dessen Basisebenen zur Aufrißebene parallel sind, ist die zur Grundrißebene parallele Achse $M M'$ durch ihre Projektionen M_1 M_1', M_2 M_2' und der vordere Basiskreis k durch seine Projektionen k_1, k_2 gegeben.

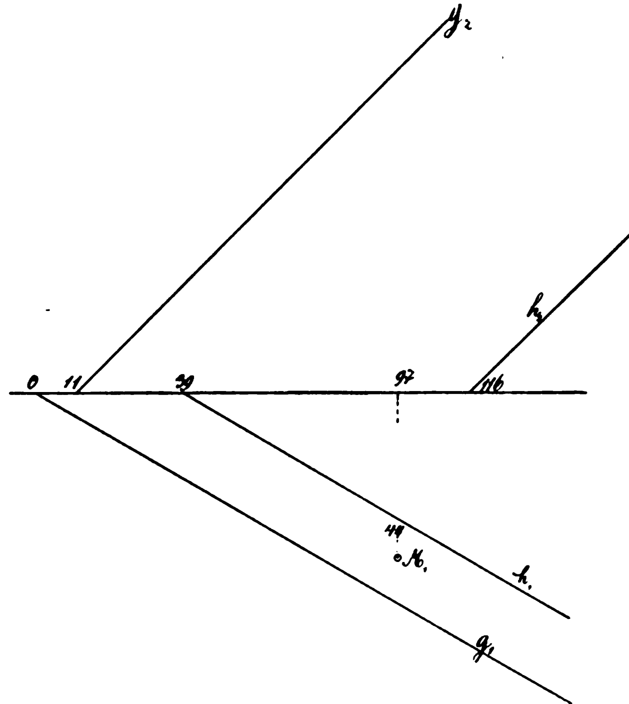
Von der regulären dreiseitigen Pyramide ist die Spitze S durch ihre Projektionen S_1, S_2 und die Gerade, in welcher sich die Höhe befindet, durch ihre Projektionen $S_1 h_1$, $S_2 h_2$ gegeben, von denen $S_1 h_1$ senkrecht $M_1 M_1'$ ist. Ferner soll die untere Basiskante der Pyramide in der Grundrißspur der durch die Spitze S und die Achse $M M'$ bestimmten Ebene liegen. (Figur 13.)



Figur 13.

14. Aufgabe. (Vermessungs- und Kulturingenieure.)

Es soll in senkrechter Projektion ein Würfel dargestellt werden, von dem zwei diagonal gegenüberliegende Kanten sich in den durch die Projektionen g_1, g_2 und h_1, h_2 gegebenen Geraden befinden und von dem die Grundrißprojektion M_1 des Mittelpunktes der unteren auf diesen Geraden senkrechten Seitenfläche gegeben ist.



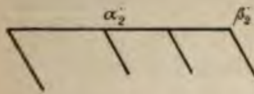
Figur 14.

15. Aufgabe. (S.-S. 1905.)

Darstellung der Durchdringung eines auf der Grundrißebene stehenden vierseitigen schiefen Prisma und einer schräggelegenen vierseitigen regulären Pyramide in senkrechter Projektion.

Von dem Prisma ist die Grundfläche $\alpha_1 \beta_1 \gamma_1 \delta_1$ in der Grundrißebene und die eine Seitenfläche $\alpha \alpha' \beta \beta'$ durch ihre Projektionen $\alpha_1 \alpha_1'$, $\beta_1 \beta_1'$ und $\alpha_2 \alpha_2'$, $\beta_2 \beta_2'$ gegeben.

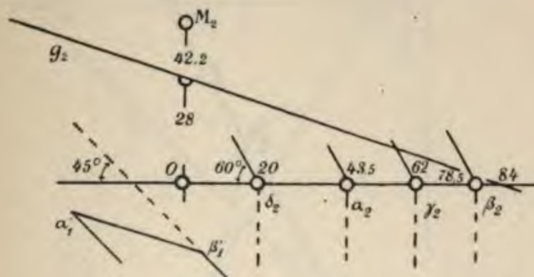
Von der Pyramide ist der Mittelpunkt M der quadratischen Basis durch seine Projektionen M_1, M_2 gegeben. Die eine Kante dieser Basis soll in der Geraden liegen, die sich in der Ebene $\alpha \alpha' \beta \beta'$ befindet und durch ihre gegebene Aufrißprojektion g_2 bestimmt ist; und ferner soll auch die Pyramidenspitze S in der Ebene $\alpha \alpha' \beta \beta'$ liegen. (Figur 15.)



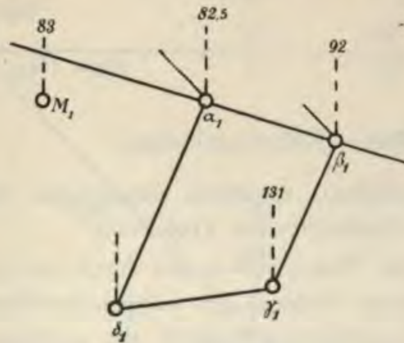
16. Aufgabe. (Kulturingenieure.)

Darstellung einer regulären sechsseitigen Pyramide und Konstruktion der Schatten in senkrechter Projektion. Von der Pyramide ist der Mittelpunkt M des regulären Basissechseckes durch seine Projektionen M_1, M_2 gegeben. Eine Basiskante soll in der durch ihre Projektionen g_1, g_2 gegebenen Geraden g liegen und die nach oben gelegene Pyramidenhöhe soll den Hauptdiagonalen des Basissechseckes gleich sein.

Die Lichtrichtung l ist durch die Projektionen l_1, l_2 bestimmt. (Figur 16.)



$\alpha_1\delta_1 \parallel \beta_1\gamma_1$



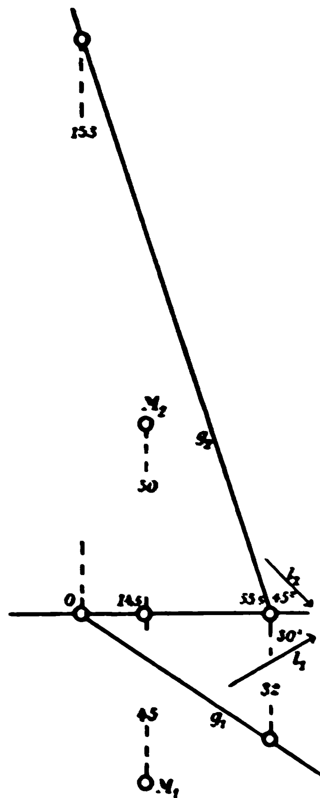
Figur 15.

17. Aufgabe. (W.-S. 1906.)

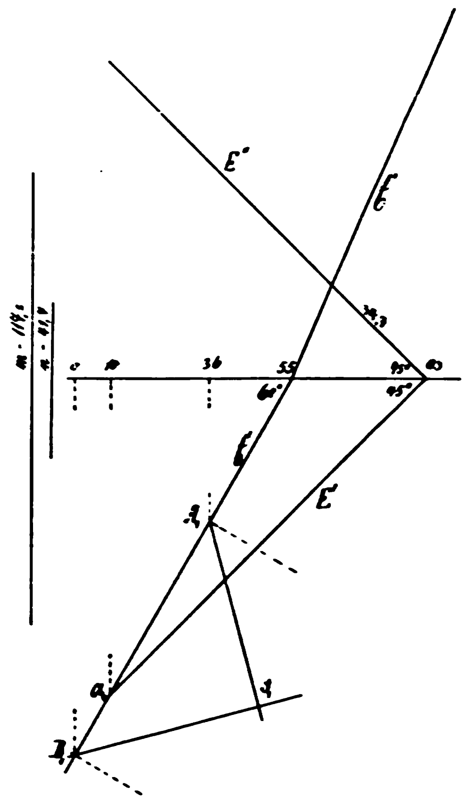
Darstellung der Durchdringung einer auf der Grundrißebene stehenden, regulären vierseitigen Pyramide u. eines schräggestellten regulären vierseitigen Prisma in senkrechter Projektion.

Von der regulären vierseitigen Pyramide ist die Grundrißprojektion A_1 B_1 S_1 der einen Seitenfläche mit deren Spuren $\mathfrak{E}'$, $\mathfrak{E}''$ gegeben.

Von dem regulären vierseitigen Prisma ist das Spurenpaar E', E'' der Basisebene und die eine Ecke des Basisquadrates im Schnittpunkt a_1 der Spuren $\mathfrak{E}'$, E' gegeben. Die untere Basiskante soll in der Schnittgeraden der Ebene $\mathfrak{E}$, E liegen; ferner sollen die Basiskanten gleich der gegebenen Strecke m und die Längskanten gleich der gegebenen Strecke n sein. (Figur 17.)



Figur 16.



Figur 17.

18. Aufgabe. (Kulturingenieure.)

Darstellung eines schräggestellten, regulären vierseitigen Prisma nebst Konstruktion des Schlagschattens in senkrechter Projektion.

Die eine Längsseitenfläche des Prisma soll in der durch die Spuren E', E'' gegebenen Ebene liegen. Von dieser rechteckigen Längsseitenfläche ist die in dieser Ebene liegende unterste Längskante $a\alpha$ durch die gegebene Grundrißprojektion $a_1\alpha_1$ bestimmt. Die Länge der Kanten des Basisquadrates sollen gleich der halben Länge der Längskanten sein. Die Lichtrichtung ist durch die Projektionen l_1, l_2 gegeben. (Figur 18.)

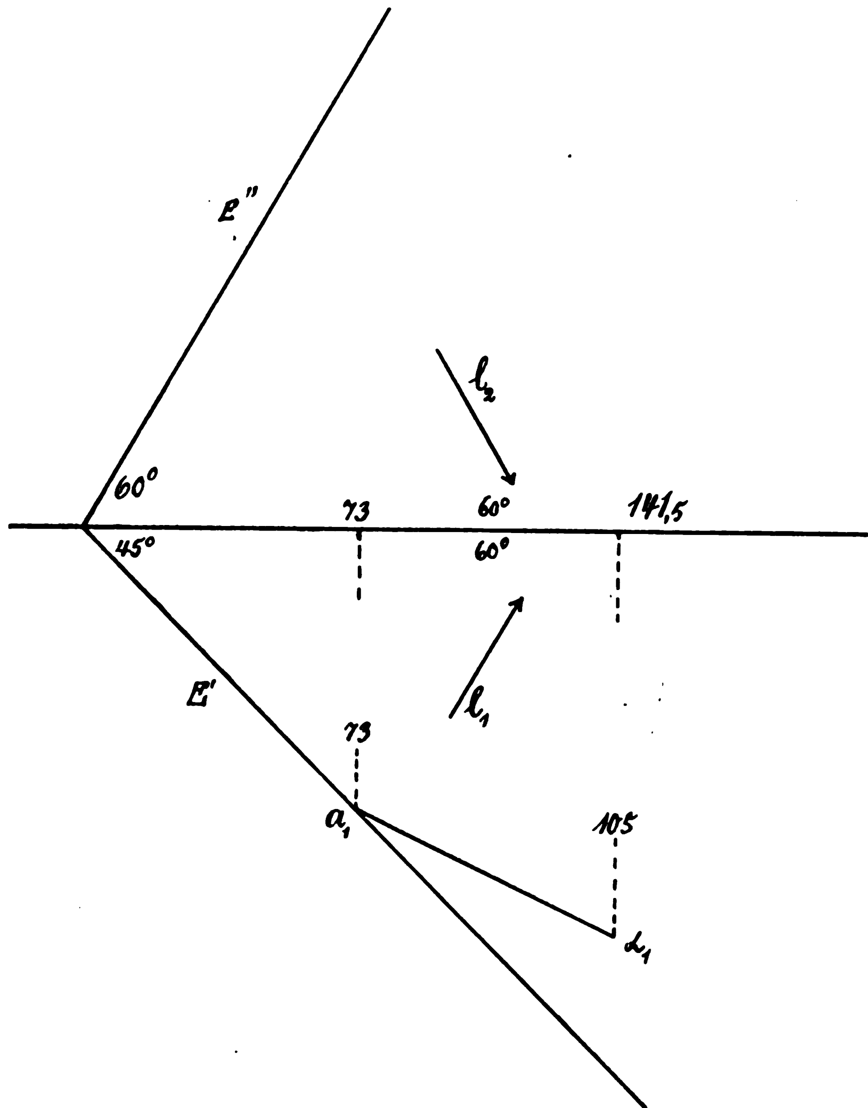
19. Aufgabe. (S.-S. 1906. — Auch für Kulturingenieure.)

Darstellung der Durchdringung einer schräggestellten, regulären dreiseitigen Pyramide und einer anderen schräggestellten dreiseitigen Pyramide in senkrechter Projektion.

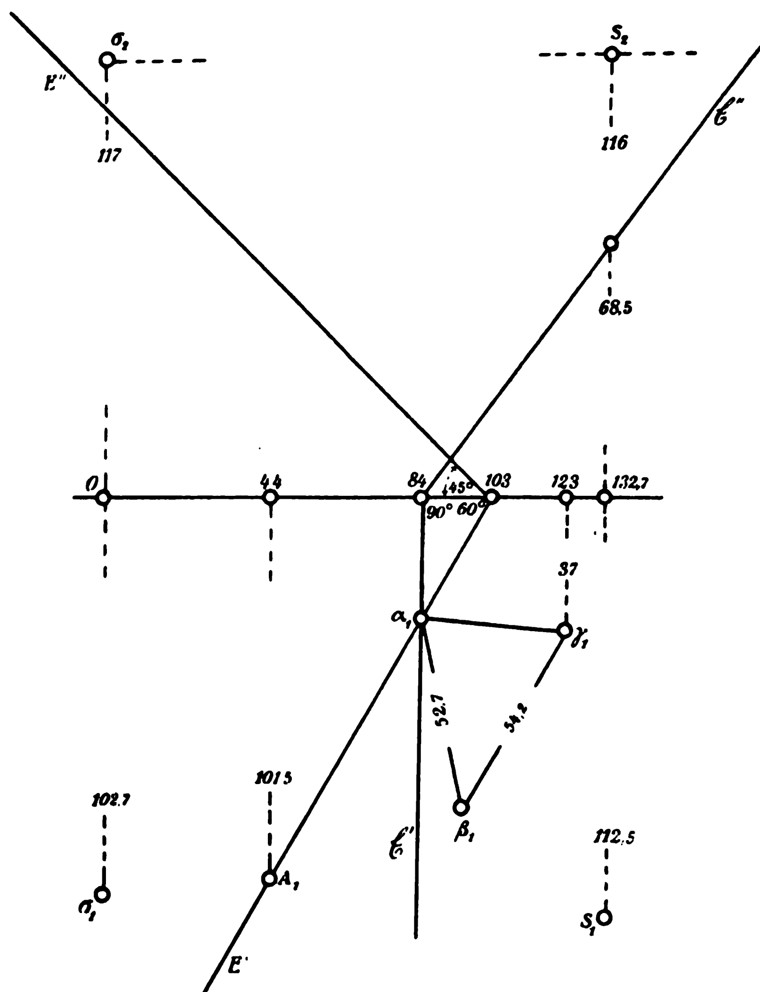
Von der regulären dreiseitigen Pyramide ist gegeben: die Basisebene durch ihre Spuren E', E'' und ein in der Grundrißebene liegender Basis-Eckpunkt A_1, ferner die Spitze durch ihre Projektionen S_1, S_2.

Von der anderen dreiseitigen Pyramide ist gegeben: die Basisebene durch ihre Spuren $\mathfrak{E}'$, $\mathfrak{E}''$ und die Grundrißprojektion $\alpha_1 \beta_1 \gamma_1$ des Basisdreieckes, dessen Ecke α_1 in der Grundrißebene liegt, ferner die Spitze durch ihre Projektionen σ_1, σ_2.

Die Aufrißprojektionen S_2, σ_2 beider Spitzen liegen in gleicher Höhe über der Projektionsachse. (Figur 19.)



Figur 18.



Figur 19.

Druck von Franz X. Seitz, München.

Lösungen

zu den Aufgaben

aus der

Höheren Mathematik, Technischen Mechanik

und

Darstellenden Geometrie,

für

Bau-, Maschinen-, Elektro-, Kultur- und Vermessungs-Ingenieure sowie Architekten.

Veröffentlicht

von

Dr. L. Marc und K. Koch.

MÜNCHEN 1907.

August Lachner, Polytechnische Buchhandlung.

VORWORT.

Die Aufgaben aus der »Höheren Mathematik, technischen Mechanik und darstellenden Geometrie« sind für Studierende der technischen Wissenschaften bestimmt und sollen denselben Gelegenheit bieten, den in den Vorlesungen gehörten Lehrstoff einzuüben und zu wiederholen. Da die Aufgaben nicht in didaktischer Reihenfolge angeordnet sind, ist im folgenden ein Verzeichnis gegeben, welches eine sachgemässe Auswahl der Aufgaben ermöglicht.

Bei der Auswahl der Aufgaben aus der darstellenden Geometrie wähle man zuerst solche Durchdringungen, bei denen die Basisfiguren in der gleichen Ebene liegen oder bei denen durch Verlängerung eines Körpers eine gemeinsame Basisebene erreicht werden kann. Es ist dies der Fall bei den Aufgaben: 3, 7, 9, 13, 17, 19.

Inhaltsangabe.

A) Höhere Mathematik.

1. Analytische Geometrie der Ebene.

2. Analytische Geometrie des Raumes.

3. Differential- und Integralrechnung.

4. Differentialgleichungen.

B) Technische Mechanik.

1. Graphische Statik.

2. Festigkeitslehre.

3. Dynamik.

C) Darstellende Geometrie.

(Die mit geraden Nummern bezeichneten Aufgaben bestehen lediglich in Aufstellung von Korpern. Da solche Aufstellungen auch in den übrigen Aufgaben auftreten, sind erstere Aufgaben nicht ausgeführt.)

Berichtigungen.

Aufgabensammlung:

Seite 10 Zeile 11 v. o. muß es heißen: $x = \pi$, statt $x = +\frac{\pi}{6}$.

Seite 45 Zeile 1 und 2 v. u. muß m und n vertauscht werden.

Lösungen:

Seite 20 Zeile 4 v. u. muß es heißen: 10,44 [cm²] statt 3,38 cm².

Seite 20 Zeile 5 v. u. muß es heißen:

$$F_{II} = \frac{\pi}{18}(1 + 4 \cdot 1{,}1547 + 2 \cdot 1{,}4142 + 4 \cdot 1{,}5275 + 2 \cdot 1{,}4142 + 4 \cdot 1{,}1547 + 1)$$
$$= 4{,}1\ [\mathrm{cm}^2].$$

I. Höhere Mathematik.

1. Aufgabe.

Die Koordinaten des Schnittpunktes A der Geraden 3) mit dem Kreise 1.) lauten:

$$x_1 = \frac{2}{1+\operatorname{tg}^2\varphi}\cdot(a_1+b_1\operatorname{tg}\varphi) \qquad \text{4a.}$$

$$y_1 = \frac{2\operatorname{tg}\varphi}{1+\operatorname{tg}^2\varphi}\cdot(a_1+b_1\operatorname{tg}\varphi) \qquad \text{4b.}$$

Die Koordinaten des Schnittpunktes B der Geraden 3.) mit dem Kreise 2.) lauten:

$$x_2 = \frac{2}{1+\operatorname{tg}^2\varphi}\cdot(a_2+b_2\operatorname{tg}\varphi) \qquad \text{5a.}$$

$$y_2 = \frac{2\operatorname{tg}\varphi}{1+\operatorname{tg}^2\varphi}\cdot(a_2+b_2\operatorname{tg}\varphi) \qquad \text{5b.}$$

Die Koordinaten des Punktes P, welcher die Strecke $\overline{AB}$ im Verhältnis λ teilt, sind:

$$x = \frac{x_1-\lambda x_2}{1-\lambda} \quad \text{bezw.} \quad y = \frac{y_1-\lambda y_2}{1-\lambda}$$

oder mittels 4a, 4b, 5a, 5b

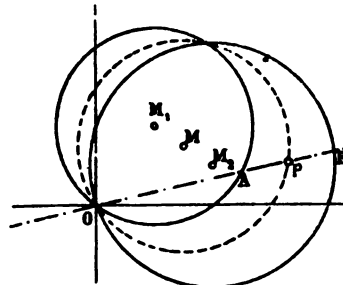
$$x = \frac{2}{1+\operatorname{tg}^2\varphi}\cdot\frac{(a_1+b_1\operatorname{tg}\varphi)-\lambda(a_2+b_2\operatorname{tg}\varphi)}{1-\lambda} \qquad \text{6a.}$$

$$y = \frac{2}{1+\operatorname{tg}^2\varphi}\cdot\frac{(a_1+b_1\operatorname{tg}\varphi)-\lambda(a_2+b_2\operatorname{tg}\varphi)}{1-\lambda} \qquad \text{6b.}$$

Um den geometrischen Ort des Teilpunktes zu finden, eliminiere man aus 6a.) mittels 3.) den Parameter $\operatorname{tg}\varphi$. Man erhält:

$$x^2+y^2 = 2\cdot\frac{a_1-\lambda a_2}{1-\lambda}\,x + 2\cdot\frac{b_1-\lambda b_2}{1-\lambda}\,y \quad .\ .\ 7.$$

Die Gleichung 7.) stellt ein Kreisbüschel dar, dessen Grundpunkte die Schnittpunkte der Kreise 1 und 2 sind. (Fig. 1.)



Figur 1.

Für zwei Werte von λ

$$\lambda = \frac{a_1}{a_2}$$

$$\lambda = \frac{b_1}{b_2}$$

berühren die zugehörigen Kreise die Koordinatenachsen.

2. Aufgabe.

1. Aus der Kurvengleichung

$$y^2 = \frac{(c^2 - x^2)^3}{c^4} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; .$$

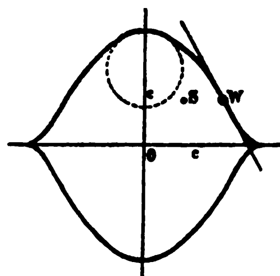
ersieht man, dass für $x > c$ die Werte für y imaginär werden; zur weit Diskussion bilde man y'. (Figur 2.)

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{c^2} x \cdot (c^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; .$$

In den Punkten $x = 0 \quad y = \pm c$ und
$x = \pm c \quad y = 0$

wird $y' = 0$, die Kurve hat also daselbst horizontale Tangenten. Fernei

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{3}{c^2} \cdot \frac{c^2 - 2x^2}{(c^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; .$$



Figur 2.

Für den Wendepunkt wird der zweite Diffe tialquotient Null und die Abszissen der vier We punkte lauten (aus 2a)

$$x = \pm \frac{c}{2}\sqrt{2}$$

die trigonometrische Tangente in denselben hat Wert:

$$\operatorname{tg} \alpha = \pm \frac{3\sqrt{2}}{4} c.$$

3. $$\rho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = \frac{\left[1 + \frac{9}{c^4} x^2 (c^2 - x^2)\right]^{\frac{3}{2}}}{-\frac{3}{c^2} \cdot \frac{c^2 - 2x^2}{(c^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}}}$$

$$\rho_{x=0} = \frac{c}{3}; \quad \rho_{x=c} = 0$$

4. Die Grösse des von der Kurve begrenzten Flächenstückes ist:

$$F = 4\int_0^c \frac{(c^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}{c^2} dx = \frac{1}{2c^2}\left[(5c^2x - 2x^3)\sqrt{c^2 - x^2} + 3c^4 \, arc \sin \frac{x}{c}\right]_0^c = \frac{3}{4}\mathfrak{1}$$

5. Die Koordinaten des gesuchten Schwerpunktes sind:

$$\xi = \frac{\int\limits_0^c x \frac{1}{c^2}(c^2-x^2)^{\frac{3}{2}} dx}{\int\limits_0^c \frac{1}{c^2}(c^2-x^2)^{\frac{3}{2}} dx} = \frac{-\frac{1}{5c^2}\Big[(c^2-x^2)^{\frac{5}{2}}\Big]_0^c}{\frac{3}{16}\pi c^2} = \frac{16c}{15\cdot\pi}$$

$$\eta = \frac{\frac{1}{2}\int\limits_0^c y^2\,dx}{\int\limits_0^c y\,dx} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{16}{35}\cdot c^3}{\frac{3}{16}\cdot\pi\cdot c^2} = \frac{128}{105\cdot\pi}\cdot c.$$

6. $$V_x = \pi\int\limits_{-c}^{+c} y^2\,dx = \pi\int\limits_{-c}^{+c}\frac{(c^2-x^2)^3}{c^4}dx = \frac{\pi}{c^4}\Big[c^6x - c^4x^3 + \frac{3}{5}c^2x^5 - \frac{1}{7}x^7\Big]_{-c}^{+c} = \frac{32}{35}c^3\cdot\pi$$

$$V_y = \pi\int\limits_{-c}^{+c} x^2\,dy = \pi\int\limits_{-c}^{+c}\Big(c^2 - c^{\frac{4}{3}}y^{\frac{2}{3}}\Big)dy = \pi\Big[c^2y - c^{\frac{4}{3}}\cdot\frac{3}{5}\cdot y^{\frac{5}{3}}\Big]_{-c}^{+c} = \frac{4}{5}c^3\cdot\pi$$

Da man in 4.) und 5.) Fläche und Schwerpunktskoordinaten bestimmt hat, so findet man V_x und V_y auch bequem mittels der Guldinschen Regel: Volumen eines Rotationskörpers = Rotierende Fläche · Weg des Schwerpunktes.

$$V_x = \frac{3}{8}\pi\cdot c^2\cdot 2\pi\frac{128c}{105\pi} = \frac{32c^3\pi}{35}.$$

Ebenso findet man V_y.

3. Aufgabe.

A.) $$xy'' + 2y' = x^2$$

oder

$$y'' + \frac{2}{x}y' = x$$

ist eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit zweitem Glied.

Man löst dieselbe am einfachsten durch die Substitution

$$y' = p;\quad y'' = \frac{dp}{dx}$$

und erhält dadurch eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung in p und x, nämlich

$$\frac{dp}{dx} + \frac{2p}{x} - x = 0,$$

welche leicht zu lösen ist.

Eine andere Methode ist folgende: 1. Man suche die Lösung der Differentialgleichung ohne zweites Glied

$$y'' + \frac{2}{x} y' = 0$$

mittels der Substitution $y' = p$ und erhält:

$$p = \frac{c}{x^2}$$

hieraus $$y = \frac{c_1}{x} + c_2.$$

2. Durch Probieren mit der Form:

$$y = a x^3 + b x^2 + c x + d$$

sucht man ein partikuläres Integral von

$$y'' + \frac{2}{x} y' = x.$$

Es findet sich $$y = \frac{x^3}{12}.$$

3. Die allgemeine Lösung der vorgelegten Differentialgleichung lautet somit:

$$y = \frac{x^3}{12} + \frac{c_1}{x} + c_2$$

B.) $$\frac{dy}{dx} = 2z - 3y + x \quad \ldots \quad 1.$$

$$\frac{dz}{dx} = 2y \quad \ldots \quad 2.$$

Man differentiere Gleichung 1.) nach x;

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 2\frac{dz}{dx} - 3\frac{dy}{dx} + 1 \quad \ldots \quad 3.$$

2.) in 3.) eingesetzt gibt:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} - 4y = 1 \quad \ldots \quad 4.$$

1. Man suche eine Lösung der Differentialgleichung

$$y'' + 3y' - 4y = 0 \quad \ldots \quad 5.$$

die charakteristische Gleichung ist

$$\alpha^2 + 3\alpha - 4 = 0$$

und ihre Lösung $$\alpha_1 = 1$$
$$\alpha_2 = -4.$$

Also lautet die Lösung von 5.)

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-4x} \quad \ldots \quad 6.$$

2. Durch Probieren mit

$$y = a x^2 + b x + c = 0$$

suche man dann ein partikuläres Integral von 4.). Dasselbe ist

$$y = -\frac{1}{4}.$$

Somit hat man als allgemeine Lösung von 4.)

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-4x} - \frac{1}{4}.$$

Um nun auch z als Funktion von x auszudrücken, differentiert man 6.)

$$\frac{dy}{dx} = c_1 e^x - 4 c_2 e^{-4x} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 7.$$

und setzt 6.) und 7.) in 1.) ein. Das Resultat der Substitution ist

$$z = 2 c_1 e^x - \frac{1}{2} c_2 e^{-4x} - \frac{x}{2} - \frac{3}{8}.$$

4. Aufgabe.

1. Die Fläche werde durch die Horizontalebenen $z = c$ geschnitten. Die Gleichung der Schnittkurve lautet

$$c = \frac{1 - y^2}{1 + x^2} \text{ oder umgeformt } \frac{x^2}{\frac{1-c}{c}} + \frac{y^2}{1-c} - 1 = 0.$$

Sie stellt Ellipsen dar mit den Hauptachsen

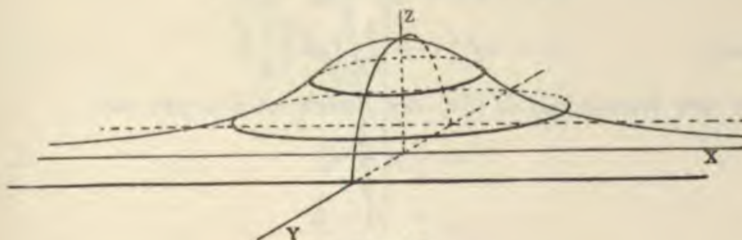
$$\sqrt{\frac{1-c}{c}} \text{ und } \sqrt{1-c}.$$

Die Gleichungen der Schnittkurven mit den Koordinatenebenen sind

$(z = 0)$ $y \pm 1 = 0$ (Zwei parallele Geraden.)
$(y = 0)$ $z(1 + x^2) - 1 = 0$ (Kurve 3. Ordnung.)
$(x = 0)$ $y^2 + z - 1 = 0$ (Parabel.)

2. α) Die verlangte Volumenberechnung kann auf drei Arten, nämlich durch Summierung längs der drei Achsen ausgeführt werden. Die leichteste Art ist die Summierung längs der z-Achse, weil die Querschnitte Ellipsen sind. (Siehe Figur 3.) Die Ellipsenachsen des Querschnittes $z = z$ sind

$$a = \sqrt{\frac{1-z}{z}} \text{ und } b = \sqrt{1-z}.$$



Figur 3.

Die Fläche des Querschnittes ist somit

$$F = a \cdot b \cdot \pi = \frac{1-z}{\sqrt{z}} \cdot \pi$$

und
$$V_\alpha = \pi \int_0^1 \frac{1-z}{\sqrt{z}}\, dz = \pi \left[2\sqrt{z} - \frac{2}{3}\sqrt{z^3} \right]_0^1 = \frac{4}{3}\,[\mathrm{cm}^3].$$

β.)

$$V_\beta = \int_0^1 \int_0^x z\, dy\, dx = \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{3x - x^3}{1+x^2}\, dx = \left[\frac{2}{3} \lg(1+x^2) - \frac{x^2}{6} \right]_0^1 = \frac{2}{3} \lg 2 - \frac{1}{6}\,[\mathrm{cm}^3].$$

3. Die Hauptkrümmungsradien der Fläche im Punkte $z = 1$ sind identisch mit den Krümmungsradien der Kurven

$$(y = 0) \quad z(1 + x^2) - 1 = 0$$
$$(x = 0) \quad y^2 + z - 1 = 0$$

in dem Punkte $z = 1$. Mittels der Formel

$$\rho = \frac{[1 + y'^2]^{\frac{3}{2}}}{y''}$$

ergibt sich

$$\rho_1 = \frac{1}{2}$$
$$\rho_2 = \frac{1}{2}.$$

5. Aufgabe.

Wie die Multiplikation $x \cdot y = a^2$ zeigt, ist die vorgelegte Kurve eine Hyperbel, deren Asymptoten die x- und y-Achse sind.

1. Bezeichnet man die Koordinaten von A und B mit

$$x_1 = a t_1, \quad y_1 = \frac{a}{t_1} \quad \text{bezw.}$$
$$x_2 = a t_2, \quad y_2 = \frac{a}{t_2},$$

so ergibt sich durch Einsetzen in die Formel

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = b^2$$

die Beziehung
$$(t_1 - t_2)^2 \left(1 + \frac{1}{t_1^2 t_2^2}\right) = \left(\frac{b}{a}\right)^2.$$

2. Für den Mittelpunkt $M(\xi \eta)$ der Strecke AB ergibt sich

$$\xi = \frac{a}{2}(t_1 + t_2)$$
$$\eta = \frac{a}{2} \cdot \frac{t_1 + t_2}{t_1 t_2}.$$

3. Aus diesen beiden Gleichungen findet man

$$t_1 + t_2 = \frac{2\xi}{a}$$

$$t_1 t_2 = \frac{\xi}{\eta}$$

$$(t_1 - t_2)^2 = \frac{4\xi^2}{a^2} - \frac{4\xi}{\eta}.$$

4. Aus Gleichung 1.) ergibt sich mittels 3.)

$$\left(\frac{4\xi^2}{a^2} - \frac{4\xi}{\eta}\right) \left(1 + \frac{\eta^2}{\xi^2}\right) = \frac{b^2}{a^2}$$

oder

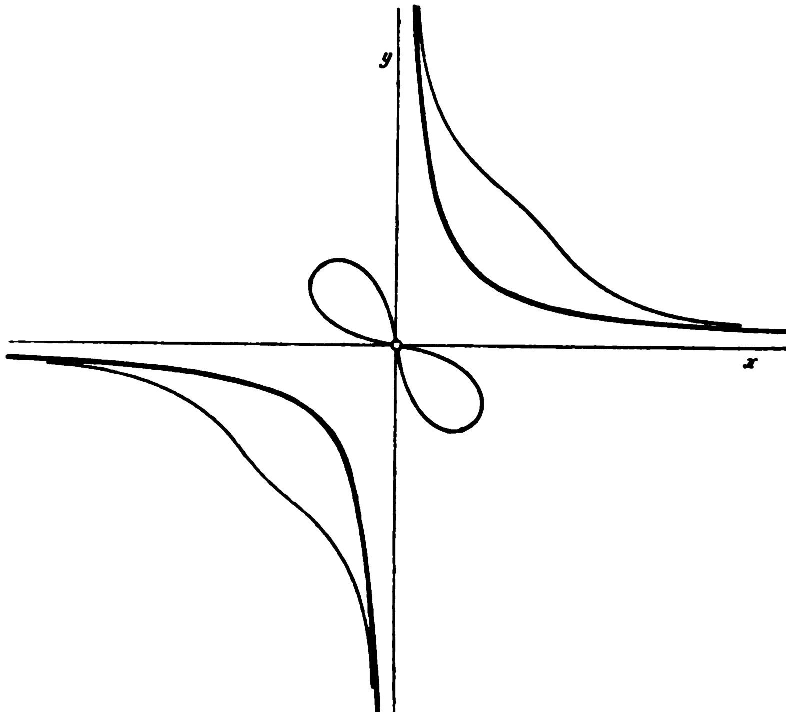
$$4(\xi\eta - a^2)(\eta^2 + \xi^2) = b^2\eta\xi.$$

Diese Gleichung stellt eine Kurve vierten Grades vor, welche, wie Fig. 4 zeigt, aus zwei getrennten Teilen, nämlich aus einer Lemniskate und einer asymptotisch zur x- und y-Achse verlaufenden Kurve besteht. Setzt man $a = 0$, so erhält man die Geraden

$$x = 0 \text{ und } y = 0,$$

ferner den Kreis

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 5.$$



Figur 4.

6 Setzt man in Gleichung 4.) für $\xi = \rho \cdot \cos\varphi$ und für $\eta = \rho \cdot \sin\varphi$ ein, so kommt die Gleichung der Kurve in Polarkoordinaten:

$$\rho^2 = \frac{2a^2}{\sin 2\varphi} + \frac{b^2}{4}.$$

6. Aufgabe.

Die Oberfläche des Rotationsparaboloids zwischen $x = 0$ und $x = a$ ist dargestellt durch das Integral

$$O = 2\pi \int_0^a y\, ds$$

durch Einsetzen von $y = \sqrt{2px}$ und $ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$ ergibt sich

$$O = 2\pi \int_0^a \sqrt{2px} \cdot \sqrt{1 + \frac{p}{2x}}\, dx = 2\pi \sqrt{p} \int_0^a \sqrt{2x + p}\, dx$$

$$= \frac{2\pi \cdot \sqrt{p}}{3}\left[(2a + p)^{\frac{3}{2}} - p^{\frac{3}{2}}\right].$$

Setzt man p aus der Klammer und substituiert $p = \frac{b^2}{2a}$ aus der Parabelgleichung, so ergibt sich

$$O = \frac{2\pi b^4}{3 \cdot 4 \cdot a^2}\left[\left(1 + \left(\frac{2a}{b}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right].$$

Entwickelt man nun $\left[1 + \left(\frac{2a}{b}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}$ nach dem binomischen Lehrsatz, so erhält man nach kurzer Rechnung

$$O = \pi b^2\left[1 + \frac{a^2}{b^2} - \frac{2}{3}\frac{a^4}{b^4} + \frac{a^6}{b^6} - \cdots\right].$$

Die Glieder in der Klammer werden für $a < b$ rasch kleiner. Ist z. B. die Parabel $y^2 = 20x$ vorgelegt, so ist für $b = 2$ der Fehler für $O = \pi \cdot b^2$ kleiner als $1^0/_0$.

7. Aufgabe.

a) Die Differentialgleichung der Kurven erhält man durch Elimination von c aus

$$y = ce^{-x} + x - 1$$

$$\frac{dy}{dx} = -ce^{-x} + 1$$

$$\frac{dy}{dx} + y - x = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{I.}$$

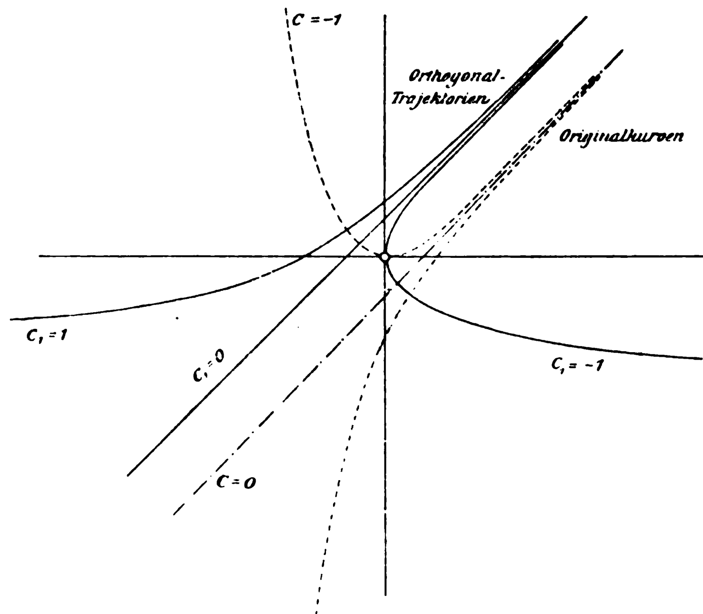
Die Gleichung der Orthogonaltrajektorien lautet:

$$\frac{dx}{dy} - y + x = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{II.}$$

Denkt man sich x und y in II. vertauscht, so geht II. in I. über und man kann deshalb die Lösung von II.

$$x = c_1 \cdot e^{-y} + y - 1$$

sofort ablesen.



Figur 5.

Kurven beider Systeme sind für $c = -1, 0, +1$ in Figur 5 gezeichnet.

b) Um aus $\rho \cdot \cos\varphi = a$ die Differentialgleichung zu erhalten, hat man

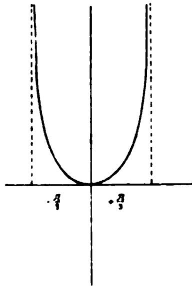
$$\text{für } \rho = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} \text{ und für } \cos\varphi = \frac{1}{[1+\mathrm{tg}^2\varphi]^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}$$

einzusetzen. Man erhält dann

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = a \cdot \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Setzt man $p = \frac{dy}{dx}$, so geht die Gleichung über in

$$\frac{dp}{1+p^2} = \frac{dx}{a}$$



Figur 6.

$$\operatorname{arctg} p = \frac{x}{a} + c_1$$

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{a} + c_1\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{I.}$$

$$y = -a \cdot \lg \cos\left(\frac{x}{a} + c_1\right) + c_2$$

$$e^{-\frac{y-c_2}{a}} = \cos\left(\frac{x}{a} + c_1\right). \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{II.}$$

Die Bedingungsgleichungen für die spezielle Kurve lauten:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} c_1 = 0 \text{ d. i. } c_1 = 0 \text{ aus I.}$$

$$e^{+\frac{c_2}{a}} = 1 \text{ d. i. } c_2 = 0 \text{ aus II.}$$

Also hat man

$$e^{-\frac{y}{a}} = \cos\frac{x}{a}.$$

Die Kurve ist periodisch und ein Stück derselben ist in Figur 6 skizziert.

8. Aufgabe.

a) Die Gleichung der Projektion der Kurve auf die xy-Ebene erhält man durch Elimination von t aus.

1. $x = 2t$
2. $y = t^2$
3. $z = \lg t.$

Es findet sich:

aus 1. und 2.	$x^2 = 4y$	Parabel.
aus 1. und 3.	$e^z = \frac{x}{2}$	Exponentialkurve.
aus 2. und 3.	$e^{2z} = y$	Exponentialkurve.

b) Die Länge des Bogenstückes ist dargestellt durch das Integral

$$L = \int_{t=1}^{t=3} ds = \int_1^3 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} \cdot dt$$

$$= \int_1^3 \left(2t + \frac{1}{t}\right) dt = [t^2 + \lg t]_1^3 = 8 + \lg 3.$$

c) Den Radius der ersten Krümmung erhält man durch Einsetzen in die Formel:

$$r = \frac{s'^2}{\sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2 - s''^2}}$$

Darin ist $$s' = \frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$

$$x'' = \frac{d^2x}{dt^2} \text{ u. s. w.}$$

Man stellt am besten ein Schema zusammen:

$$\frac{dx}{dt} = 2 \qquad \frac{dy}{dt} = 2t\,[=2] \qquad \frac{dz}{dt} = \frac{1}{t}\,[=1]$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0 \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = 2 \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{1}{t^2}\,[=-1]$$

$$\frac{d^3x}{dt^3} = 0 \qquad \frac{d^3y}{dt^3} = 0 \qquad \frac{d^3z}{dt^3} = \frac{2}{t^3}\,[=2]$$

$$\frac{ds}{dt} = 2t + \frac{1}{t}\,[=3]; \quad \frac{dt}{ds} = \frac{t}{2t^2+1}\left[=\frac{1}{3}\right]; \quad \frac{d^2s}{dt^2} = 2 - \frac{1}{t^2}\,[=1]$$

$$\frac{d\left(\frac{dt}{ds}\right)}{dt} = \frac{1-2t^2}{(2t^2+1)^2} = \left[-\frac{1}{9}\right]; \quad \frac{d^2\left(\frac{dt}{ds}\right)}{dt^2} = \frac{4t(2t^2-3)}{(2t^2+1)^3} = \left[\frac{-4}{27}\right]$$

Die eingeklammerten Werte gelten für $t = 1$. So wird $r = \frac{9}{2}$.

Für den Radius der zweiten Krümmung ρ besteht die Relation

$$\rho = \frac{1}{r^2 \cdot \delta}$$

Die Bestimmung von δ erfordert eine längere Rechnung:

$$\delta = \begin{vmatrix} \frac{dx}{ds} & \frac{d^2x}{ds^2} & \frac{d^3x}{ds^3} \\ \frac{dy}{ds} & \frac{d^2y}{ds^2} & \frac{d^3y}{ds^3} \\ \frac{dz}{ds} & \frac{d^2z}{ds^2} & \frac{d^3z}{ds^3} \end{vmatrix}$$

$$\frac{dx}{ds} = \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dt}{ds}\left[=\frac{2}{3}\right]$$

$$\frac{d^2x}{ds^2} = \frac{d\left(\frac{dx}{ds}\right)}{ds} = \frac{d\left(\frac{dx}{ds}\right)}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{d\left(\frac{dx}{dt} \cdot \frac{dt}{ds}\right)}{dt} \cdot \frac{dt}{ds}$$

$$= \left(\frac{dx}{dt} \cdot \frac{d\left(\frac{dt}{ds}\right)}{dt} + \frac{dt}{ds} \cdot \frac{d^2x}{dt^2}\right) \cdot \frac{dt}{ds}\left[=-\frac{2}{27}\right]$$

$$\frac{d^3x}{ds^3}=\frac{d\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)}{dt}\cdot\frac{dt}{ds}=\left(\frac{dt}{ds}\right)^2\cdot\left(\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2\left(\frac{dt}{ds}\right)}{dt^2}+2\frac{d\left(\frac{dt}{ds}\right)}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{d^3x}{dt^3}\cdot\frac{dt}{ds}\right)$$
$$+\left(\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d\left(\frac{dt}{ds}\right)}{dt}+\frac{dt}{ds}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}\right)\frac{d\left(\frac{dt}{ds}\right)}{dt}\cdot\frac{dt}{ds}\left[=-\frac{2}{81}\right].$$

In analoger Weise findet man die Werte für $\frac{dy}{ds}$ u. s. w. Es ergibt sich schließlich

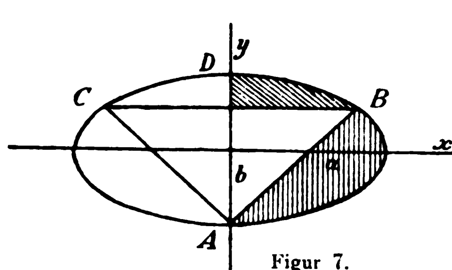
$$\delta=\begin{vmatrix}\frac{2}{3} & -\frac{2}{27} & -\frac{2}{81}\\ \frac{2}{3} & \frac{4}{27} & -\frac{8}{81}\\ \frac{1}{3} & -\frac{4}{27} & \frac{8}{81}\end{vmatrix}=\left(\frac{2}{9}\right)^3$$

und $\rho=\frac{9}{2}$.

9. Aufgabe.

Bezeichnet man die Abszisse von B mit ξ, so ist

$$\eta=b\sqrt{1-\frac{\xi^2}{a^2}}$$



Figur 7.

und der Inhalt des Dreiecks ABC ist

$$F=\frac{1}{2}BC\cdot(b+\eta)$$

$$F=b\cdot\xi\left(1+\sqrt{1-\frac{\xi^2}{a^2}}\right)\quad\ldots\text{I.}$$

Soll diese Fläche ein Maximum sein, so muß

$$\frac{dF}{d\xi}=\frac{b}{a^2}\left(\frac{a^2\sqrt{1-\frac{\xi^2}{a^2}}+a^2-2\xi^2}{\sqrt{1-\frac{\xi^2}{a^2}}}\right)=0$$

werden. Dies ist der Fall für

$$\sqrt{1-\frac{\xi^2}{a^2}}=2\frac{\xi^2}{a^2}-1$$

oder ausgerechnet

$$\xi=\frac{a}{2}\sqrt{3}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\text{II.}$$

Man hat also

$$B:\ x_1 = \frac{a}{2}\sqrt{3}$$
$$y_1 = \frac{b}{2}$$
$$C:\ x_2 = -\frac{a}{2}\sqrt{3}$$
$$y_2 = \frac{b}{2}.$$

2. Setzt man II. in I. ein, so ist

$$\Delta\, ABC = \frac{3}{4}\sqrt{3}\cdot ab$$

$$\text{Segm. } BDC = 2\int_{\frac{b}{2}}^{b} a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}\,dy = \frac{2a}{b}\left[\frac{y}{2}\sqrt{b^2-y^2}+\frac{b^2}{2}\,arc\sin\frac{y}{b}\right]_{\frac{b}{2}}^{b}$$
$$= \frac{a\cdot b}{12}\left[4\pi - 3\sqrt{3}\right].$$

Durch Subtraktion

Ellipse — Δ *ABC* — Segm. *BDC*

findet man für die Segmente *AB* und *AC* den Wert

$$\frac{ab}{12}\left[4\pi - 3\sqrt{3}\right].$$

Also sind die drei Segmente flächengleich. (Figur 7 Seite 12.)

10. Aufgabe.

Um die Kurven zu zeichnen, legt man sich eine Tabelle an.

	$\lambda = 0$	$\lambda = a$	$\lambda = 2a$
$\varphi = 0$	$\rho = 0$	$\rho = a$	$\rho = 2a$
$\varphi = \frac{\pi}{2}$	$\rho = \frac{a}{2}\sqrt{2}$	$\rho = a + \frac{a}{2}\sqrt{2}$	$\rho = 2a + \frac{a}{2}\sqrt{2}$
$\varphi = \pi$	$\rho = a$	$\rho = 2a$	$\rho = 3a$
$\varphi = \frac{3\pi}{2}$	$\rho = \frac{a}{2}\sqrt{2}$	$\rho = a + \frac{a}{2}\sqrt{2}$	$\rho = 2a + \frac{a}{2}\sqrt{2}$
$\varphi = 2\pi$	$\rho = 0$	$\rho = a$	$\rho = 2a$
$\varphi = \frac{5\pi}{2}$	$\rho = -\frac{a}{2}\sqrt{2}$	$\rho = a - \frac{a}{2}\sqrt{2}$	$\rho = 2a - \frac{a}{2}\sqrt{2}$
$\varphi = 3\pi$	$\rho = -a$	$\rho = 0$	$\rho = a$
$\varphi = \frac{7\pi}{2}$	$\rho = -\frac{a}{2}\sqrt{2}$	$\rho = a - \frac{a}{2}\sqrt{2}$	$\rho = 2a - \frac{a}{2}\sqrt{2}$
$\varphi = 4\pi$	$\rho = 0$	$\rho = a$	$\rho = 2a$

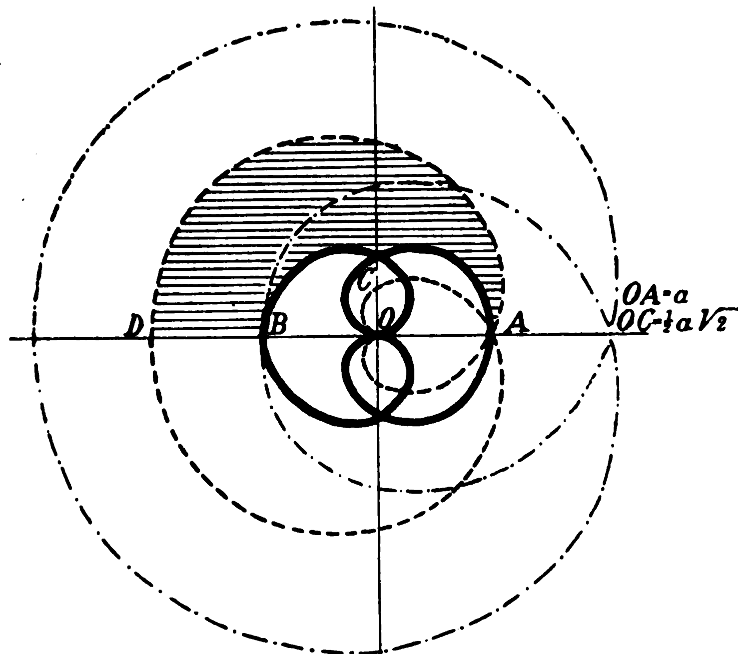
Da man die Strecke $\frac{a}{2}\sqrt{2}$ mittels eines rechtwinkligen Dreiecks konstruieren kann, sind die Radienvektoren leicht aufzutragen. Die Tangentialrichtungen in den aufgetragenen Punkten findet man mittels der Formel

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{r}{\frac{dr}{d\varphi}}$$

wo μ der Winkel zwischen Radiusvektor und Tangente ist. (Figur 8.)

	$\lambda = 0$	$\lambda = a$	$\lambda = 2a$
$\operatorname{tg} \mu =$	$2 \cdot \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$	$\frac{2\left(1 + \sin \frac{\varphi}{2}\right)}{\cos \frac{\varphi}{2}}$	$\frac{2\left(2 + \sin \frac{\varphi}{2}\right)}{\cos \frac{\varphi}{2}}$
$\varphi = \frac{\pi}{2}$	$\mu = c \cdot 64^0$	$\mu = c \cdot 78^0$	$\mu = c \cdot 82^0$
$\varphi = \pi$	$\mu = 90^0$	$\mu = 90^0$	$\mu = 90^0$
$\varphi = 2\pi$	$\mu = 0$	$\mu = c \cdot 116^0$	$\mu = c \cdot 98^0$

u. s. w.



Figur 8.

Horizontal bezw. Vertikaltangenten erhält man, wenn man in $\operatorname{tg}\mu = \frac{r}{\frac{dr}{d\varphi}}$ für μ die Werte $\frac{\pi}{2} - \varphi$ bezw. $\pi - \varphi$ einsetzt.

2. Den Inhalt der schraffierten Fläche erhält man durch Subtraktion zweier Flächenstücke.

$\mathfrak{J} =$ Segm. AD — (Segm. AOC + Segm. OCB).

$\mathfrak{J} =$ Segm. AD — 2 Segm. OCB.

$AC =$ Bogen, $OC =$ Gerade; arc AC ist symmetrisch arc BC.

$$2\mathfrak{J} = \int_0^{\pi} \left(a + a \sin\frac{\varphi}{2}\right)^2 d\varphi - 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(a \sin\frac{\varphi}{2}\right)^2 d\varphi.$$

Setzt man $\vartheta = \frac{\varphi}{2}$, so kommt

$$= 2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + 2\sin\vartheta + \sin^2\vartheta)\, d\vartheta - 4a^2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\vartheta\, d\vartheta$$

$$= 2a^2 \left[\frac{3}{2}\vartheta - 2\cos\vartheta - \frac{1}{4}\sin 2\vartheta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - 4a^2 \left[\frac{\vartheta}{2} - \frac{1}{4}\sin 2\vartheta\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= a^2\left[\frac{3}{2}\pi + 4\right] - a^2\left[\frac{\pi}{2} + 1\right]$$

$$= a^2\,[\pi + 3].$$

3. Die Bogenlänge in Polarkoordinaten ist ausgedrückt durch

$$B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2}\, d\varphi$$

$$= a\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{5 + 8\sin\vartheta + 3\sin^2\vartheta}\, d\vartheta.$$

Um den Wert des Integrals zu berechnen, wende man die Simpsonsche Regel für vier Intervalle an. Es ergibt sich

$$\text{Integral} = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_4).$$

Darin ist für h der Wert $\frac{\pi}{16}$ und für y der Wert $\sqrt{5 + 8\sin\vartheta + 3\sin^2\vartheta}$ einzusetzen. Es ist

$$y_0 = \sqrt{5 + 8\sin 0 + 3\sin^2 0} = 2{,}24$$

$$y_1 = \sqrt{5 + 8\sin\frac{\pi}{16} + 3\sin^2\frac{\pi}{16}} = 2{,}58$$

$$y_2 = \sqrt{5 + 8 \sin \frac{\pi}{8} + 3 \sin^2 \frac{\pi}{8}} = 2{,}91$$

u. s. w. Das Resultat lautet:

$$B = \frac{a\pi}{48} \cdot 34{,}75 \text{ cm.}$$

11. Aufgabe.

Setzt man in der vorgelegten Differentialgleichung

$$r^5 - \cos 3\varphi = M$$
$$r \cdot \sin 3\varphi = N,$$

so nimmt sie die Form an

$$M\,dr + N\,d\varphi = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{I.}$$

Diese Differentialgleichung hat einen von r allein abhängigen integrierenden Faktor, wenn

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial N}{\partial r} - \frac{\partial M}{\partial \varphi}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{II.}$$

von φ unabhängig ist; dies ist der Fall; denn setzt man

$$\frac{1}{N} = \frac{1}{r \sin 3\varphi}$$

$$\frac{\partial N}{\partial r} = \sin 3\varphi$$

$$\frac{\partial M}{\partial \varphi} = 3 \sin 3\varphi$$

in II. ein, so ergibt sich der Wert $-\frac{2}{r}$.

2. Der integrierende Faktor selbst lautet

$$v = e^{-\int\left(\frac{dN}{\partial r} - \frac{dM}{\partial \varphi}\right)\frac{\partial r}{N}}$$

$$= e^{\int \frac{2}{r} dr} = r^2.$$

Die vorgelegte Differentialgleichung geht somit in die Form über

$$r^2 (r^5 - \cos 3\varphi)\,dr + r^3 \sin 3\varphi\,d\varphi = 0.$$

Die Lösung dieser totalen Differentialgleichung lautet:

$$\int M\,dr + \int\left(N - \int \frac{\partial N}{\partial r} \cdot dr\right) d\varphi = C$$

$$\int M\,dr = \int (r^5 - r^2 \cos 3\varphi)\,dr = \frac{r^6}{6} - \frac{r^3}{3} \cos 3\varphi$$

$$N - \int \frac{\partial N}{\partial r}\,dr = r^3 \sin 3\varphi - \int 3 r^2 \sin 3\varphi\,dr = 0.$$

Man erhält somit

$$\frac{1}{6} r^6 - \frac{1}{3} r^3 \cos 3\varphi = C.$$

Setzt man $C = 0$ und vereinfacht, so erhält man die Kurve

$$r^3 = 2 \cos 3\varphi \qquad \text{III.}$$

Wenn φ den Bogen von 0 bis $\frac{\pi}{6}$ durchläuft, so hat 3φ alle Werte von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ angenommen; von da ab wiederholen sich immer dieselben Werte für

$$r = \sqrt[3]{2 \cos 3\varphi}.$$

Rechnet man einige Werte aus, so erhält man für

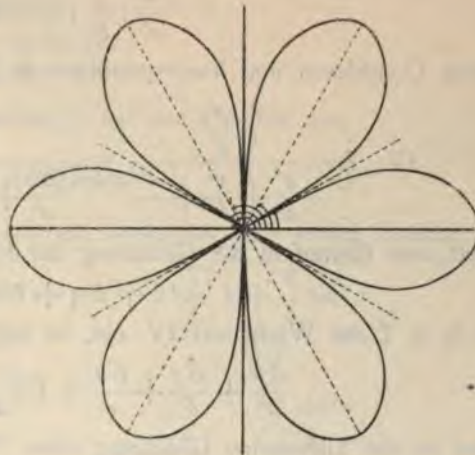
$\varphi = 0 \qquad r = 1,245$

$\varphi = \frac{\pi}{18} \qquad r = 1,123$

$\varphi = \frac{\pi}{9} \qquad r = 0,803$

$\varphi = \frac{\pi}{6} \qquad r = 0.$

Ferner ist $\operatorname{tg} \mu = -\operatorname{cotg} 3\varphi$, wo μ der Winkel der Kurventangente mit dem Radiusvektor ist. Aus diesen Angaben lässt sich die Kurve leicht zeichnen. Sie besteht aus sechs kongruenten Schleifen. (Figur 9.)



Figur 9.

12. Aufgabe.

1. Setzt man in II $x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - \lambda = 0$, die Werte von x, y, z aus

$$\text{I.} \quad x = \frac{\xi a^2}{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2} \qquad y = \frac{\eta b^2}{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2} \qquad z = \frac{\zeta c^2}{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$$

ein, so ergibt sich

$$\text{III.} \quad \xi a^2 \cos \alpha + \eta b^2 \cos \beta + \zeta c^2 \cos \gamma - \lambda (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) = 0.$$

Diese Flächen gehen für alle Werte von λ durch den Koordinatenanfang. Durch einfache Umformung nimmt III. die Form an:

$$\left(\xi - \frac{a^2 \cos \alpha}{2\lambda}\right)^2 + \left(\eta - \frac{b^2 \cos \beta}{2\lambda}\right)^2 + \left(\zeta - \frac{c^2 \cos \gamma}{2\lambda}\right)^2$$
$$= \frac{a^4 \cos^2 \alpha}{4\lambda^2} + \frac{b^4 \cos^2 \beta}{4\lambda^2} + \frac{c^4 \cos^2 \beta}{4\lambda^2};$$

daraus erhellt, dass die Flächen Kugeln sind, deren Mittelpunkte auf der Geraden liegen:

$$\frac{x}{a^2 \cos\alpha} = \frac{y}{b^2 \cos\beta} = \frac{z}{c^2 \cos\gamma}.$$

2. Wie aus 1.) ersichtlich, entspricht jeder Ebene des ersten Raumes eine durch den Koordinatenanfang gehende Kugel des zweiten Raumes. Folglich entspricht dem Schnitt zweier Ebenen, d. h. einer Geraden des ersten Raumes der Schnitt zweier Kugeln, d. h. ein durch den Koordinatenanfang gehender Kreis des zweiten Raumes.

3. Aus I. ergibt sich

$$\frac{x}{a^2} : \frac{y}{b^2} : \frac{z}{c^2} = \xi : \eta : \zeta,$$

durch Quadrieren und korrespondierende Addition ergibt sich

$$\text{IV.}\quad \xi = \frac{\frac{x}{a^2}}{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}},\quad \eta = \frac{\frac{y}{b^2}}{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}},\quad \zeta = \frac{\frac{z}{c^2}}{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}.$$

Setzt man hierauf in die Gleichung der Ebene des zweiten Raumes

$$A\xi + B\eta + C\zeta + D = 0$$

für ξ, η, ζ die Werte aus IV. ein, so ergibt sich

$$\frac{Ax}{a^2} + \frac{By}{b^2} + \frac{Cz}{c^2} + D\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right) = 0.$$

Dies ist die allgemeine Gleichung einer Fläche zweiten Grades, welche durch den Koordinatenanfang geht und deren Achsen parallel zu den Koordinatenachsen sind.

4. Folglich entsprechen den Geraden des zweiten Raumes im ersten Raume die Schnittkurven zweier Flächen zweiten Grades, d. h. eine Raumkurve vierten Grades.

13. Aufgabe.

Die beiden Kreisgleichungen lauten:

$$(x - c)^2 + y^2 = a^2$$
$$(x + c)^2 + y^2 = b^2.$$

1. Zur Zeit t hat der Punkt

P die Koordinaten $\begin{cases} x = c + a\cos wt \\ y = -a\sin wt \end{cases}$

Q die Koordinaten $\begin{cases} x = -c + b\cos wt \\ y = +b\sin wt. \end{cases}$

2. Die Koordinaten des Halbierungspunktes von PQ, d. h. von R sind:

$$x = \frac{a + b}{2}\cos wt$$

$$y = \frac{-a+b}{2} \sin wt.$$

3. Der geometrische Ort des Halbierungspunktes R ergibt sich durch Elimination von t aus 2.):

$$\frac{x^2}{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{-a+b}{2}\right)^2} - 1 = 0.$$

Der Mittelpunkt dieser Ellipse liegt im Koordinatenanfang, die Ellipsenachsen liegen in den Koordinatenachsen.

4. Für $a = b$ gehen die Gleichungen 2.) über in

$$x = a \cos wt$$
$$y = 0,$$

d. h. der Punkt R führt Sinusschwingungen auf der x-Achse aus.

14. Aufgabe.

1. Um die Kurve zeichnen zu können, bestimme man einige Punkte.

x	$\sqrt{1-\frac{4}{3}\sin^2 x}$	$\sqrt{1+\frac{4}{3}\sin^2 x}$
0	± 1	± 1
$\frac{\pi}{6}$	$\pm 0{,}816$	$\pm 1{,}155$
$\frac{2\pi}{6}$	0	$\pm 1{,}414$
$\frac{3\pi}{6}$	—	$\pm 1{,}528$
$\frac{4\pi}{6}$	0	$\pm 1{,}414$
$\frac{5\pi}{6}$	$\pm 0{,}816$	$\pm 1{,}155$
π	± 1	$\pm 1.$

Zur Bestimmung der Horizontal- und Vertikaltangenten bilde man

$$\frac{dy}{dx} = \mp \frac{\frac{4}{3}\sin x \cos x}{\sqrt{1 \mp \frac{4}{3}\sin^2 x}}$$

$$= 0 \text{ für } x = 0, \pm\frac{\pi}{2}, \pm\pi \ldots \text{ (Horizontaltangente)}$$

$$= \infty \text{ für } x = \pm\frac{\pi}{3}, \pm\frac{2\pi}{3} \ldots \text{ (Vertikaltangente).}$$

Die Kurve II ist nahezu ein Kreis. (Figur 10 Seite 20.)

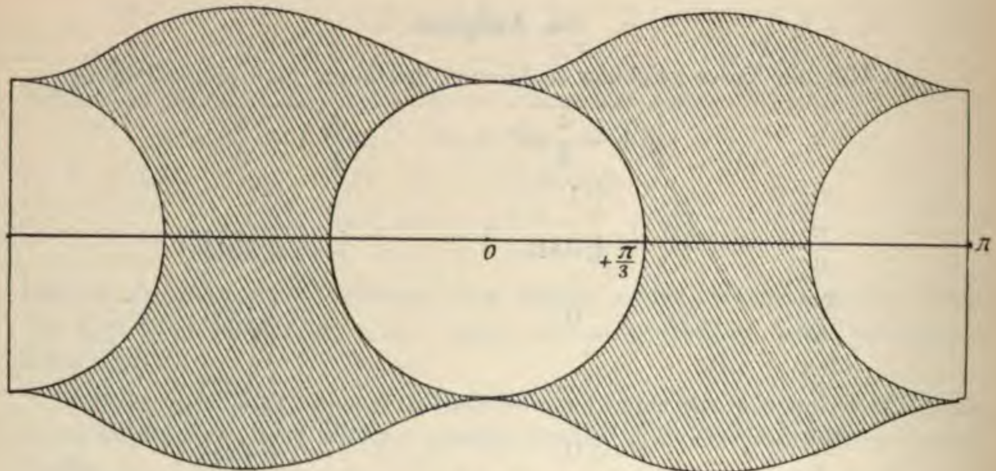
$$2.\quad V_{\text{I}} = \pi \int_{-\frac{\pi}{3}}^{+\frac{\pi}{3}} y^2\,dx = \pi \int_{-\frac{\pi}{3}}^{+\frac{\pi}{3}} \left(1 - \frac{4}{3}\sin^2 x\right) dx$$

$$= \frac{\pi}{3}\left[x + 2\sin x\cos x\right]_{-\frac{\pi}{3}}^{+\frac{\pi}{3}} = \frac{2\pi}{3}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)[\text{cm}^3]$$

$$V_{\text{II}} = \pi \int_{-\pi}^{+\pi} \left(1 + \frac{4}{3}\sin^2 x\right) dx = \frac{10}{3}\pi^2\,[\text{cm}^3],$$

das schraffierte Stück ergibt das Volumen

$$V_{\text{III}} = \frac{\pi}{9}(26\pi - 6\sqrt{3})\,[\text{cm}^3].$$



Figur 10.

3. Die Simpsonsche Regel lautet:

$$F = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 4y_5 + y_6).$$

Setzt man die Werte aus Tabelle 1.) ein, so ergibt sich

$$F_{\text{II}} = \frac{\pi}{18}(1 + 4\cdot 1{,}1547 + 2\cdot 1{,}4142 + 4\cdot 1{,}5275 + 2\cdot 1{,}4142 + 1) = 3{,}18\,[\text{cm}^2]$$

$F_{\text{I}} = \frac{\pi}{18}(1 + 3{,}27) = 0{,}745$, die schraffierte Fläche mißt dann $3{,}38\,[\text{cm}^2]$.

15. Aufgabe.

Der gesuchte Berührungspunkt habe die Koordinaten $x_1\,y_1\,z_1$. Die Gleichung der Tangentialebene in diesem Punkte an das Ellipsoid lautet:

$$\frac{x x_1}{a^2}+\frac{y y_1}{b^2}+\frac{z z_1}{c^2}=1.$$

Die Abschnitte, welche diese Ebene auf den Achsen bildet, sind

$\frac{a^2}{x_1}, \frac{b^2}{y_1}, \frac{c^2}{z_1}$, und das Tetraeder hat den Inhalt

$$\mathfrak{J}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\frac{a^2 b^2}{x_1 y_1}\cdot\frac{c^2}{z_1}=\frac{1}{6}\frac{a^2 b^2 c^2}{x_1 y_1 z_1} \quad \ldots \ldots \ldots \text{I.}$$

Diese Funktion soll ein Minimum werden. Gleichzeitig soll aber noch die Bedingung erfüllt sein

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}+\frac{z_1^2}{c^2}=1 \quad \ldots \ldots \ldots \text{II.}$$

In I. und II. sind x und y unabhängige Variable, z ist die abhängige Variable. Soll $\mathfrak{J}$ ein Maximum oder Minimum werden, dann muß

$$\frac{d\mathfrak{J}}{dx}=0 \text{ und } \frac{d\mathfrak{J}}{dy}=0.$$

Bildet man diese Gleichungen unter Beachtung, daß z abhängig von x und y, so erhält man zu II. noch zwei neue Gleichungen und kann damit x, y, z bestimmen.

$$0=\frac{\partial\mathfrak{J}}{\partial x}=\frac{a^2\cdot b^2\cdot c^2}{6}\left[\frac{-1}{x^2 y z}+\frac{-1}{x y z^2}\frac{\partial z}{\partial x}\right]$$

$$0=\frac{\partial\mathfrak{J}}{\partial y}=\frac{a^2\cdot b^2\cdot c^2}{6}\left[\frac{-1}{x y^2 z}+\frac{-1}{x y z^2}\frac{\partial z}{\partial y}\right]$$

$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{c^2 x}{a^2 z}$ und $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{c^2 y}{b^2 z}$ findet man aus II. und erhält schließlich

$$\frac{x_1^2}{a^2}=\frac{z_1^2}{c^2} \quad \ldots \ldots \ldots \text{III.}$$

$$\frac{y_1^2}{b^2}=\frac{z_1^2}{c^2} \quad \ldots \ldots \ldots \text{IV.}$$

Aus II., III., IV. ergibt sich dann

$$x_1=\frac{a}{\sqrt{3}},\ y_1=\frac{b}{\sqrt{3}},\ z_1=\frac{c}{\sqrt{3}}$$

und $\mathfrak{J}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot abc$; die Werte $x=\infty$, $y=\infty$, $z=\infty$ geben Maxima.

16. Aufgabe.

1. Man suche das Integral der Differentialgleichung ohne zweites Glied:

$$\frac{d^2 y}{dt^2}+2a\frac{dy}{dt}+a^2 y=0 \quad \ldots \ldots \ldots \text{I.}$$

$$r^2+2ar+a^2=0 \quad \text{(Charakteristische Gleichung.)}$$

$$r_1=r_2=-a$$

$$y=C_1 e^{-at}+C_2 e^{-at}\cdot t=C_1 y_1+C_2 y_2 \quad \ldots \ldots \text{II.}$$

2. Nun kann man auf zwei Arten weiterfahren: a) Man suche durch Probieren mit der Form $y = k_1 \sin bt + k_2 \cos bt$ . . . . III.
das Integral der gegebenen Differentialgleichung mit zweitem Glied. Man bilde aus III. $\frac{dy}{dt}$ und $\frac{d^2 y}{dt^2}$ und setze in die gegebene Differentialgleichung ein; dann muß sein: $-b^2 k_1 \sin bt - b^2 \cdot k_2 \cos bt + 2abk_1 \cos bt - 2abk_2 \sin bt + a^2 k_1 \sin bt + a^2 k_2 \cos bt \equiv \sin bt$. Dies ist der Fall für

$$k_1 (a^2 - b^2) - 2abk_2 = 1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{IV.}$$

$$k_1 \cdot 2ab + (a^2 - b^2) k_2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{V.}$$

wie man durch Koeffizientenvergleichung findet. Aus IV. und V

$$k_1 = \frac{a^2 - b^2}{(a^2 + b^2)^2}; \quad k_2 = \frac{-2ab}{(a^2 + b^2)^2}.$$

Also lautet das gesuchte Integral

$$y = \frac{a^2 - b^2}{(a^2 + b^2)^2} \cdot \sin bt - \frac{2ab}{(a^2 + b^2)^2} \cos bt . \quad \ldots\ldots \quad \text{VI.}$$

und das allgemeine Integral der gegebenen Differentialgleichung lautet:

$$y = \frac{a^2 - b^2}{(a^2 + b^2)^2} \cdot \sin bt - \frac{2ab}{(a^2 + b^2)^2} \cos bt + C_1 e^{-at} + C_2 e^{-at} t.$$

b) Die andere Methode ist folgende: Man berechne aus den beiden Gleichungen:

$$\frac{du}{dt} y_1 + \frac{dv}{dt} y_2 = 0$$

$$\frac{du}{dt} \cdot \frac{dy_1}{dt} + \frac{dv}{dt} \cdot \frac{dy_2}{dt} = F(t).$$

Das ist im vorliegenden Falle aus:

$$\frac{du}{dt} \cdot e^{-at} + \frac{dv}{dt} \cdot e^{-at} \cdot t = 0$$

$$\frac{du}{dt} \cdot (-a) \cdot e^{-at} + \frac{dv}{dt} (e^{-at} - ate^{-at}) = \sin bt,$$

die Werte von u und v; es ergibt sich nach Vereinfachung und kurzer Rechnung

$$\frac{dv}{dt} = \sin bt \cdot e^{at} . \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{VII.}$$

$$v = \frac{e^{-at}}{a^2 + b^2} (a \sin bt - b \cdot \cos bt). \quad \text{(Durch partielle Integration.)}$$

$$\frac{du}{dt} = - t \sin bt \, e^{at}$$

$$u = \frac{e^{at}}{a^2 + b^2} \left[\left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} - at \right) \sin bt + \left(bt - \frac{2ab}{a^2 + b^2} \right) \cos bt \right].$$

(Unter Verwendung von VII. mittels partieller Integration.) Die allgemeine Lösung ist dann: $y = uy_1 + vy_2 + C_1 y_1 + C_2 y_2$.

17. Aufgabe.

1. $\frac{dy}{dx} = 4 \cos x - 2 \sin 2x$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -4 \sin x - 4 \cos 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = 0 \text{ für } x = \frac{\pi}{2}, \ \frac{3\pi}{2} \ldots \frac{2\pi + 1}{2}\pi.$$

2. $\rho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2 y}{dx^2}}$

$\rho = \frac{1}{-4+4} = \frac{1}{-4+4} = \infty$ d. h. $x = \frac{\pi}{2}$ ist ein Undulationspunkt.

$$\rho = \frac{1}{+4+4} = \frac{1}{+4+4} = \frac{1}{8} \text{ cm.}$$

3. $\frac{d^2 y}{dx^2} = 0$ für $x = \frac{\pi}{2}, \ \frac{5\pi}{2}, \ \frac{9\pi}{2} \ldots$

Da aber $\sin x + \cos 2x$ vor und nach diesen Stellen dasselbe Vorzeichen hat, so sind $x = \frac{\pi}{2}, \ \frac{5\pi}{2} \ldots$ keine Wendepunkte. (Vergl. 2.)

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 0, \text{ ferner für } x = -\frac{\pi}{6}, \ \pi + \frac{\pi}{6}, \ 2\pi - \frac{\pi}{6} \text{ u. s. w.}$$

Diese Stellen geben Wendepunkte.

Für $x = -\frac{\pi}{6}$, $y = -\frac{3}{2}$ wird $\frac{dy}{dx} = 3\sqrt{3}$.

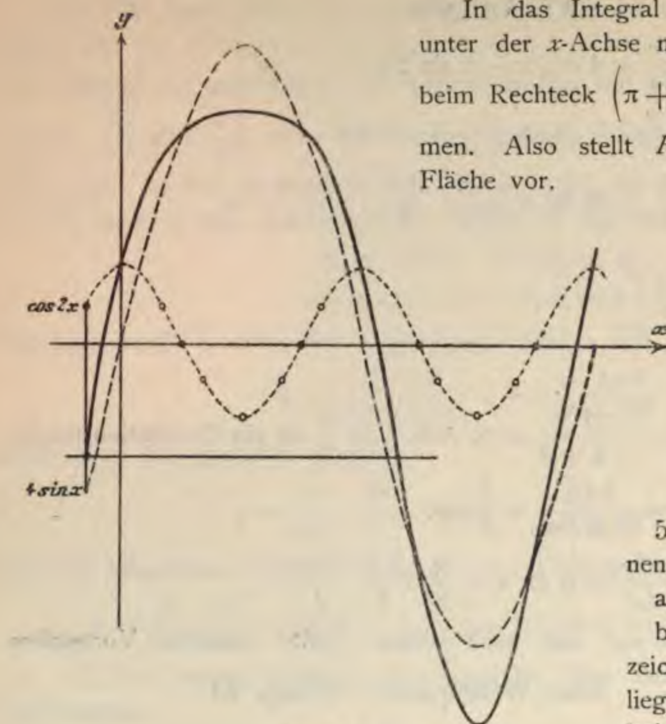
Für $x = +\frac{7\pi}{6}$; $y = -\frac{3}{2}$ wird $\frac{dy}{dx} = -3\sqrt{3}$.

Also lauten die Gleichungen der Wendetangenten:

$$\frac{y + \frac{3}{2}}{x + \frac{\pi}{6}} = 3\sqrt{3}$$

$$\frac{y + \frac{3}{2}}{x - \frac{7\pi}{6}} = -3\sqrt{3}.$$

4. $F = 2 \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (4 \sin x + \cos 2x)\, dx + \left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) \cdot \frac{3}{2}.$



Figur 11.

In das Integral geht das Flächenstüc unter der x-Achse negativ ein. Dafür ist e beim Rechteck $\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) \cdot \frac{3}{2}$ zu viel genom men. Also stellt F wirklich die gesucht Fläche vor.

$$F = 2\Big[-4 \cos x$$

$$+ \frac{1}{2} \sin 2x\Big]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} + 2\pi$$

$$= 2\Big[2\sqrt{3} + \frac{1}{4}\sqrt{3}$$

$$+ 2\pi = \frac{1}{2}(9\sqrt{3} + 4\pi$$

5. Um die Kurve zu zeic nen, kann man

a) die Kurve $4 \sin x$,

b) die Kurve $\cos 2x$

zeichnen und die übereinand liegenden Werte addieren, w bei das Vorzeichen wohl zu b achten ist. (Figur 11.)

18. Aufgabe.

Der Berührungspunkt der gesuchten Tangente habe den Parameter λ Die Gleichung der Tangente in diesem Punkte lautet dann:

$$\frac{y - 9 \sin \lambda_1}{x - 16 \cos \lambda_1} = \frac{dy}{dx} = -\frac{9 \sin \lambda_1}{16 \cos \lambda_1}.$$

Die Abschnitte dieser Geraden auf der Achse lauten:

$$a = \frac{16}{\cos \lambda_1} \, (y = 0)$$

$$b = \frac{9}{\sin \lambda_1} \, (x = 0).$$

Die Länge des Stückes zwischen den Achsen ist folglich bestimmt durch

$$l^2 = \frac{16^2}{\cos^2 \lambda_1} + \frac{9^2}{\sin^2 \lambda_1}.$$

Diese Funktion soll ein Minimum werden; dies ist der Fall für

$$\frac{d\,(l^2)}{d\lambda} = 0 = \frac{+2 \cdot 16^2 \cdot \sin \lambda}{\cos^3 \lambda} - \frac{2 \cdot 9^2 \cdot \cos \lambda}{\sin^3 \lambda}.$$

Ausgerechnet: $\operatorname{tg} \lambda_1 = \pm \frac{3}{4}$. Durch Einsetzen findet man die Tangentengleichung: $\frac{y}{15} + \frac{x}{20} - 1 = 0$, und die Länge: $l = 25$.

19. Aufgabe.

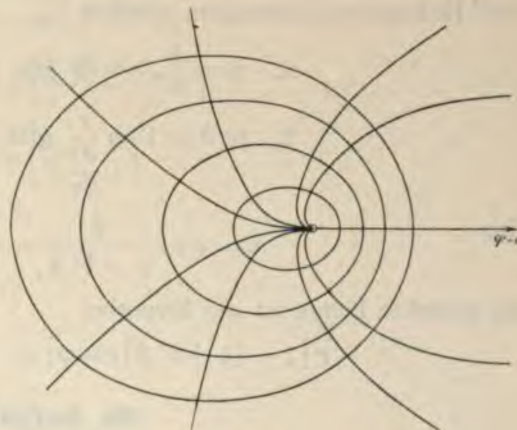
1. Die Gleichung $r\left(1 + \frac{1}{2}\cos\varphi\right) = c\ (c = 1, 2 \ldots)$ stellt eine Ellipsenschar dar, bezogen auf den Brennpunkt als Koordinatenanfang. Da $\varepsilon = \frac{1}{2}$ konstant ist, sind die Ellipsen ähnlich und ähnlich gelegen. Der Mittelpunkt und die Achsen der einzelnen Ellipsen berechnen sich mittelst den Beziehungen

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \quad \text{und} \quad c = \frac{b^2}{a}$$

als

$$e = -\frac{2}{3}c, \quad a = \frac{4}{3}c,$$

$$b = \frac{2}{3}c\sqrt{3}.$$



Figur 12.

Die Differential-Gleichung des Systems lautet:

$$\frac{dr}{d\varphi_I} = + \frac{\varepsilon r \sin\varphi}{1 + \varepsilon\cos\varphi}.$$

Um die Orthogonaltrajektorien zu erhalten, hat man aus der Gleichung

$$F = r(1 + \varepsilon\cos\varphi) - c = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{I.}$$

und aus

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi} \cdot \frac{dr}{d\varphi_{II}} - r^2 \frac{\partial F}{\partial r} = 0$$

d. i.

$$-\frac{dr}{r} = \frac{2 + \cos\varphi}{\sin\varphi} d\varphi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{II.}$$

c zu eliminieren (hier unnötig) und erhält durch Integration von II.

$$r = C \cdot \frac{(1 + \cos\varphi)}{(1 - \cos\varphi)\cdot\sin\varphi}.$$

2. Die Enveloppe des Ellipsensystems erhält man durch Elimination von ε aus den beiden Gleichungen

$$F = r(1 + \varepsilon\cos\varphi) - \left(\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\right) = 0 \quad \ldots\ldots \quad \text{I.}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \varepsilon} = r \cos \varphi - 1 + \frac{1}{\varepsilon^2} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{II.}$$

in der Form
$$r = 2\sqrt{1 - r \cos \varphi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{III.}$$

Führt man rechtwinklige Koordinaten ein, so erscheint III. als die Gleichung eines Kreises
$$(x + 2)^2 + y^2 = 8.$$

3. Für $\varepsilon < 1$ erhält man Ellipsenscharen.
   Für $\varepsilon = 1$ „ „ Parabelscharen.
   Für $\varepsilon > 1$ „ „ Hyperbelscharen.

Zur Bestimmung von ε und c der gesuchten speziellen Kurve erhält man aus
$$r(1 + \varepsilon \cos \varphi) = c$$
und
$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{c\varepsilon \sin \varphi}{(1 + \varepsilon \cos \varphi)^2}$$
zwei Bedingungsgleichungen, nämlich

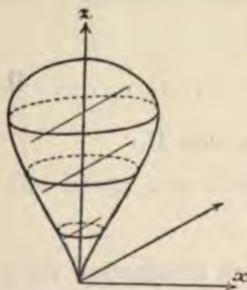
1. $\varphi = \frac{\pi}{6}$, $r = 2$ gibt $2 + \varepsilon\sqrt{3} = c$,

2. $\operatorname{tg} \vartheta = 1 = \dfrac{r}{\frac{dr}{d\varphi}}$ gibt $\varepsilon = 2 + \varepsilon\sqrt{3}$,

also
$$\varepsilon = c = \frac{2}{1 - \sqrt{3}} = -(1 + \sqrt{3}),$$
die gesuchte Kurve ist die Hyperbel
$$r\left[1 - (1 + \sqrt{3}) \cos \varphi\right] = -(1 + \sqrt{3}).$$ (Figur 12 Seite 25.)

20. Aufgabe.

Aus der vorgelegten Gleichung sieht man, daß nur für $1 \geqq z \geqq 0$ reelle Werte für x und y erhalten werden. Die horizontalen Schnittkurven, die sich für $z = c$ ergeben, sind Ellipsen, mit den Halbachsen
$$a = c\sqrt{c(1 - c)}$$
$$b = c\sqrt{\frac{c(1 - c)}{2}}$$
von der Gleichung
$$\frac{x^2}{c^3(1 - c)} + \frac{y^2}{\frac{c^3(1 - c)}{2}} - 1 = 0.$$



Figur 13.

Als vertikale Schnitte genügen
$$x = 0 \quad y = \pm z\sqrt{\frac{z(1 - z)}{2}}$$
$$y = 0 \quad x = \pm z\sqrt{z(1 - z)},$$
die herzförmigen Kurven sind leicht zu zeichnen. (Figur 13.)

Das Volumen des Körpers erhält man durch das Integral

$$V = \int_0^1 a\, b\, \pi\, dz$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{2}} \int_0^1 (z^3 - z^4)\, dz = \frac{\pi}{20 \cdot \sqrt{2}}\ \text{cm}^3.$$

21. Aufgabe.

1. $$y = a\left(e^{\frac{x}{b}} - e^{\frac{x}{c}}\right)$$

$$y = 0 \quad e^{\frac{x}{b}} = e^{\frac{x}{c}}$$

gibt $x_1 = 0$

$x_2 = -\infty.$

2. $$y' = a\left(\frac{1}{b} e^{\frac{x}{b}} - \frac{1}{c} e^{\frac{x}{c}}\right)$$

Für $x = 0$ ist $y' = a\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right)$

Für $x = -\infty$ ist $y' = 0.$

3. $y' = 0$ für $\frac{1}{b} \cdot e^{\frac{x}{b}} = \frac{1}{c} e^{\frac{x}{c}}$

d. i. für $x_3 = -\infty$

und für $e^{\frac{x}{b} - \frac{x}{c}} = \frac{b}{c}$

$$x_4 = \left(\lg \frac{b}{c}\right) : \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right)$$

$$x_4 = \frac{bc}{c-b} \cdot \lg \frac{b}{c}; \quad y_4 = a\left[\left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{c}{c-b}} - \left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{b}{c-b}}\right].$$

4. $$y'' = a\left(\frac{1}{b^2} e^{\frac{x}{b}} - \frac{1}{e^2} \cdot c^{\frac{x}{c}}\right)$$

$y'' = 0$ für $\frac{1}{b^2} e^{\frac{x}{b}} = \frac{1}{e^2} \cdot c^{\frac{x}{c}}$

d. i. für $x = -\infty$

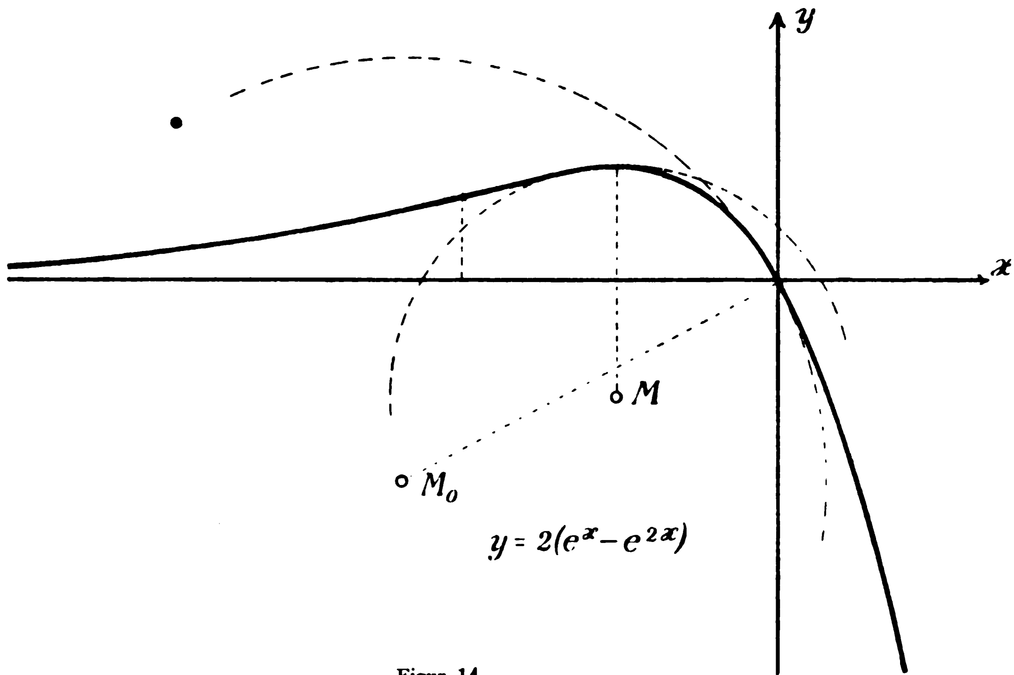
und für $x_5 = \frac{2bc}{c-b} \lg \frac{b}{c}; \quad y_5 = a\left[\left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{2c}{c-b}} - \left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{2b}{c-b}}\right]$

Für $x = x_5$ ist $y' = a\left[\frac{1}{b} \cdot \left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{2c}{c-b}} - \frac{1}{c}\left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{2b}{c-b}}\right].$

5. $$\rho_m = \frac{1}{y''} = \frac{b^2 c^2}{a} : \left(c^2 e^{\frac{x}{b}} - b^2 e^{\frac{x}{c}}\right)$$

Für $x = -\infty$ ist $\rho = \infty$.

Für $x = x_4$ ist $$\rho = \frac{b^2 c^2}{a \cdot \left[c^2 \cdot \left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{c}{c-b}} - b^2 \left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{b}{c-b}}\right]}.$$



Figur 14.

6. Für $x = 0$ ist $$\rho = \frac{\left[1 + a^2\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{a\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}\right)} = \frac{[b^2 c^2 + a^2 (c-b)^2]^{\frac{3}{2}}}{a b c (c^2 - b^2)}$$

7.

x	y	y'	ρ
0	0	-2	$\frac{5}{6}\sqrt{5} = 1{,}86$
$-\lg 2 = -0{,}69$	$\frac{1}{2}$	0	$+1$
$-2 \lg 2 = -1{,}38$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	∞
$-4 \lg 2 = -2{,}77$	$\frac{15}{128}$	—	—
$\lg 2 = 0{,}69$	-2	—	—

8. $$F = \int_{-\infty}^{0} y\,dx = a\left[b\,e^{\frac{x}{b}} - c\,e^{\frac{x}{c}}\right]_{-\infty}^{0}$$
$$= 2\left[e^{x} - \frac{1}{2}e^{2x}\right]_{-\infty}^{0}$$
$$= 2\left[1 - \frac{1}{2}\right]$$
$$F = 1\ [\text{cm}^2].$$

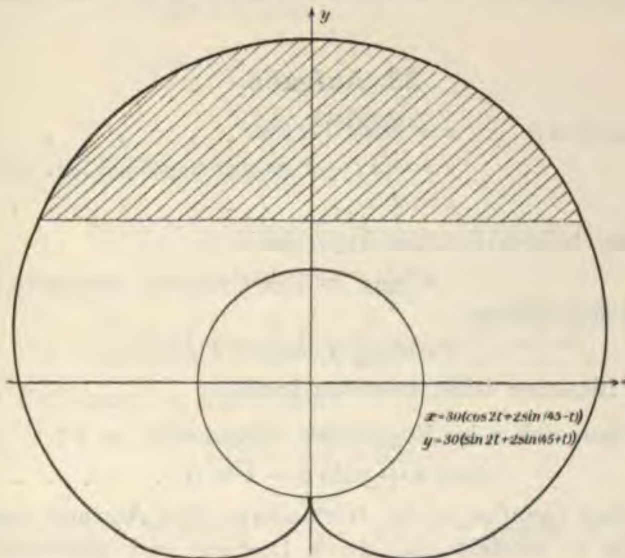
22. Aufgabe

1. Nach Angabe ist

$$A0 = 0B$$
$$\text{also}\quad AB = 2\cdot 0B$$
$$AC = 2\cdot 0B\cdot\cos t$$
$$BC = 2\cdot 0B\cdot\sin t.$$

Nun projiziert man die festen Punkte C, P und Q parallel zur y- (C_1, P_1, Q_1) und parallel zur x-Achse (C_2, Q_2, H) Dann ist

$$0P_1 = AQ_1 - A0 - P_1Q_1$$
$$x = AQ\cos t - 0B - QQ_2$$
$$= (AC + CQ)\cos t - 0B - QP\sin t$$
$$= 2\,0B\cos^2 t + RP\cos t - 0B - QP\sin t$$
$$= 0B\,(2\cos^2 t - 1) + RP\cos t - QP\sin t$$
$$= 0B\cos 2t + RP\cos t - QP\sin t.$$



Figur 15.

$$PP_1 = PQ_2 + Q_2C_2 + C_2P_1$$
$$\begin{aligned} y &= PQ \cdot \cos t + QH + CC_1 \\ &= PQ \cos t + CQ \sin t + AC \sin t \\ &= PQ \cos t + RP \sin t + 2\,0B \sin t \cos t \\ &= 0B \sin 2t + RP \sin t + PQ \cos t. \end{aligned}$$

2. Die Gleichung der Normalen im Kurvenpunkt $P(x_1 y_1)$ lautet:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = -\left(\frac{dx}{dy}\right)_{\substack{x = x_1 \\ y = y_1}} = -\left(\frac{\frac{dx}{dt}}{\frac{dy}{dt}}\right)_{t = t_1}$$

Durch Einsetzen erhält man:

$$\frac{y - (0B \sin 2t_1 + RP \sin t_1 + QP \cos t_1)}{x - (0B \cos 2t_1 + RP \cos t_1 - QP \sin t_1)} = \frac{2 \cdot 0B \sin 2t_1 + RP \sin t_1 + QP \cos t_1}{2 \cdot 0B \cos 2t_1 + RP \cos t_1 - QP \sin t_1}.$$

Wenn man in diese Gleichung der Normalen für x den Wert $-0B \cos 2t$ und für y den Wert $-0B \sin 2t$ einsetzt, so ist die Gleichung erfüllt.

3. $$F = \int_{x = -0B}^{x = RP} y\,dx = -\int_{t = \frac{\pi}{2}}^{t = 0} (0B \sin 2t + RP \sin t)(2\,0B \sin 2t + RP \sin t)\,dt$$

$$= \left[\frac{0B^2}{2}(\sin 2t \cdot \cos 2t - 2t) - 2\,0B \cdot RP \sin^3 t + \frac{RP^2}{2}(\sin t \cos t - t)\right]_{\frac{\pi}{2}}^{0}$$

$$= \frac{0B^2}{2}\pi + 2\,0B \cdot RP + \frac{RP^2}{2} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

F ist das in Figur 15 Seite 29 schraffierte Flächenstück. Die Kurve selbst ist eine Kardioide.

23. Aufgabe.

1. Die Raumkurve $x = \cos t + t \sin t$ . . . . 1.

$y = \sin t - t \cos t$ . . . . 2.

$z = t$ . . . . 3.

liegt auf dem einschaligen Rotationshyperboloid

$x^2 + y^2 = 1 + z^2$ . . . . 4.

und auf der Schraubenfläche

$x \cos z + y \sin z = 1$ . . . . 5.

wie man durch Einsetzen leicht beweisen kann.

2. Denkt man sich z im Bogenmaße ausgedrückt, so ist

$x \cos z + y \sin z - 1 = 0$ . . . . 6.

die Gleichung einer Geraden in der Normalform. Der Abstand vom Nullpunkt ist 1, die Fläche 5. entsteht also durch Drehung und gleichzeitiges Emporsteigen einer Zylindertangente.

3. $$s=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(x')^2+(y')^2+(z')^2}\,dt.$$

Nun ist
$$x'=\frac{dx}{dt}=t\cdot\cos t$$
$$y'=\frac{dy}{dt}=t\sin t$$
$$z'=\frac{dz}{dt}=1.$$

Also
$$s=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{t^2+1}\;dt=\left[\frac{t}{2}\sqrt{t^2+1}+\frac{1}{2}\lg t+\sqrt{t^2+1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}.$$

4. Die Projektion in die xz-Ebene hat die Gleichung
$$x=\cos z+z\cdot\sin z.$$
Die Zeichnung ergibt sich nach Aufgabe 17, 5.

5. Vergleiche Aufgabe 8.).
$$r=\frac{s'^2}{\sqrt{x''^2+y''^2+z''^2-s''^2}}_{t=0}=1$$
denn
$$s'=\sqrt{1+t^2}_{t=0}=1;\quad s''=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}_{t=0}=0$$
$$x''=\cos t-t\sin t\underset{t=0}{=}1$$
$$y''=\sin t+t\cos t\underset{t=0}{=}0$$
$$z''=0.$$

24. Aufgabe.

1. Wenn die Differentialgleichung
$$2y\left(x-\frac{1}{x^2}\right)dx+\left(x^2+\frac{2}{x}-3y^2\right)dy=0 \quad \ldots\ldots \text{I.}$$
ein totales Differential darstellen soll, so muß
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(2y\left(x-\frac{1}{x^2}\right)\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2+\frac{2}{x}-3y^2\right)$$
sein. Diese Bedingung ist erfüllt; denn
$$2\left(x-\frac{1}{x^2}\right)=2x-\frac{2}{x^2}.$$
Wenn $2y\left(x-\frac{1}{x^2}\right)=M$ und $x^2+\frac{2}{x}-3y^2=N$ gesetzt wird, so lautet die Lösung von I.):

$$\int M\,dx + \int\left[N - \int\frac{\partial N}{\partial x}\,dx\right]dy = c$$

d. i.

$$2y\left(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{x}\right)+\int\left[x^2+\frac{2}{x}-3y^2-x^2-\frac{2}{x}\right]dy = c$$

$$yx^2+\frac{2y}{x}-y^3 = c.$$

Das Integral lautet somit

$$yx^3+2y-y^3x-cx=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{II.}$$

2. Um die Kurven zu bestimmen, welche

a) durch den Punkt $x=1$, $y=1$

b) „ „ „ $x=1$, $y=0$

gehen, hat man diese Werte in II.) einzusetzen und erhält

a) $1+2-1=c_1$; $c_1=2$

b) $0 \quad = c_2$,

so daß die beiden Kurvengleichungen lauten:

a) $y\left(x^2+\frac{2}{x}\right)-y^3-2=0$

b) $y=0$ und $x^2+\frac{2}{x}-y^2=0$.

3. Die Differentialgleichung der Orthogonaltrajektorien lautet:

$$2y\left(x-\frac{1}{x^2}\right)dy-\left(x^2+\frac{2}{x}-3y^2\right)dx=0.$$

Setzt man $y^2=z$, also $2y\,dy=dz$, so ergibt sich die lineare Differentialgleichung

$$\left(x-\frac{1}{x^2}\right)dz-\left(x^2+\frac{2}{x}-3z\right)dx=0,$$

umgeformt

$$\frac{dz}{dx}+z\frac{3x^2}{x^3-1}-\frac{x^4+2x}{x^3-1}=0.$$

Man setzt nun $z=u\cdot v$ und berechnet

$$v \text{ aus } \frac{dv}{dx}+v\frac{3x^2}{x^3-1}=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{III.}$$

$$u \text{ aus } v\frac{du}{dx}-\frac{x^4+2x}{x^3-1}=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{IV.}$$

Aus III.) erhält man

$$v=\frac{1}{x^3-1}$$

aus IV.)

$$u=\frac{x^5}{5}+x^2+C,$$

so daß das Endresultat lautet:

$$y^2 = z = uv$$

oder

$$y^2 - \frac{1}{x^2 - 1} \cdot \left(\frac{x^5}{5} + x^3 + c\right) = 0.$$

Diese Gleichung gibt die Schar der Orthogonaltrajektorien.

25. Aufgabe.

Aus $\Delta\, AM0 \sim \Delta\, APP_1$ findet man $0M = \frac{ay}{a - x}$, ebenso

aus $\Delta\, BN0 \sim \Delta\, BPP_2$ „ „ $0N = \frac{bx}{b - y}$.

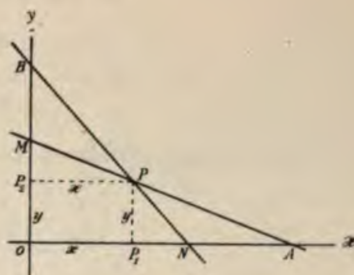
Es ist dann

$$a \cdot \frac{ay}{2(a - x)} + b \cdot \frac{bx}{2(b - y)} = c,$$

ausgerechnet

$$a^2y^2 + 2cxy + b^2x^2 - a(2c + ab)y$$
$$- b(2c + ab)x + 2abc = 0 \quad . \quad \text{I.}$$

Der geometrische Ort des Punktes P ist somit ein Kegelschnitt. (Figur 16.)



Figur 16.

Setzt man die allgemeine Kegelschnittgleichung in der Form

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

voraus, so ist

$$\Delta \equiv B^2 - AC$$

$$\Delta' \equiv \begin{vmatrix} A B D \\ B C E \\ D E F \end{vmatrix}$$

$$\operatorname{tg} 2\vartheta = \frac{2B}{A - C}$$

die Mittelpunktskoordinaten x_m und y_m

$$x_m = \frac{CD - BE}{B^2 - AC} \qquad y_m = \frac{AE - BD}{B^2 - AC}$$

Für $c = 0$ geht I.) über in

$$a^2y^2 + b^2x^2 - a^2by - ab^2x = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{II.}$$

$$\Delta = -a^2b^2 < 0.$$

Also ist II.) die Gleichung einer Ellipse. Ferner tg $2\vartheta = 0$, d. h. die Ellipsenachsen sind parallel zu den Koordinatenachsen

$$x_0 = \frac{-a^3b^2}{-2a^2b^2} = \frac{a}{2}$$

$$y_0 = \frac{-a^2 b^2}{-2a^2 b^2} = \frac{b}{2}.$$

Mittels der Transformation

$$x' = x - \frac{a}{2};\; y' = y - \frac{b}{2}$$

ergibt sich

$$\frac{x'^2}{\frac{a^2}{2}} + \frac{y'^2}{\frac{b^2}{2}} - 1 = 0.$$

Für $c = a \cdot b$ geht I.) über in

$$a^2 y^2 + 2abxy + b^2 x^2 - 3ab^2 x - 3a^2 by + 2a^2 b^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad \text{III.}$$

$$\Delta = a^2 b^2 - a^2 b^2 = 0 \quad \text{(Parabel)}$$

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a^2 & ab & -3ab^2 \\ ab & b^2 & -3a^2 b \\ -3ab^2 & -3a^2 b & 2a^2 b^2 \end{vmatrix} = 0,$$

d. h. die Parabel zerfällt in zwei parallele Gerade, und zwar

$$\left(\frac{x}{2a} + \frac{y}{2b} - 1\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1\right) = 0.$$

26. Aufgabe.

$$y^2 = \frac{x^2}{a^2}(a + x)(b - x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{I.}$$

Schnittpunkte mit der x-Achse

$x_1 = 0$ (Doppelpunkt)

$x_2 = -a$

$x_3 = +b$

Richtung der Kurve in diesen Punkten

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x(2ab + 3x(b-a) - 4x^2)}{2ya^2} = \frac{2ab + 3x(b-a) - 4x^2}{2a\sqrt{(a+x)(b-x)}}$$

$\underline{b = a}$

x	y	y'	α
0	0	1	135
$-a$	0	∞	90
$+a$	0	∞	90
$\pm\frac{a}{2}\sqrt{2}$	$\pm\frac{a}{2}$	0	0

Es wird $y' = \dfrac{2a^2 - 4x^2}{2a\sqrt{a^2 - x^2}} = 0$ für $x = \pm\dfrac{a}{2}\sqrt{2}$

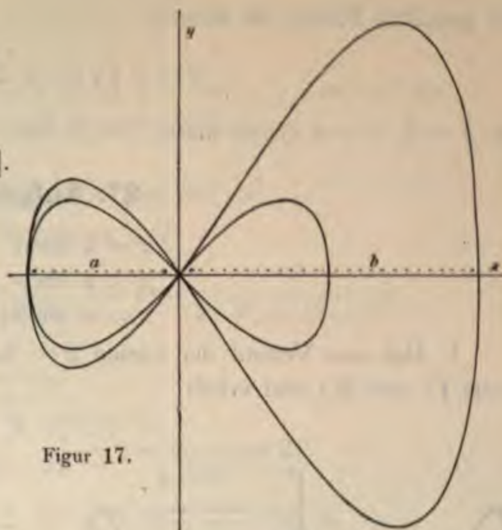
$$F = \int_0^a y\,dx = \frac{1}{a}\int_0^a x\sqrt{a^2 - x^2}\,dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3a}\sqrt{(a^2 - x^2)^3}\right]_0^a = \frac{a^2}{3}\ [\mathrm{cm}^2].$$

$b = 2a$

x	y	y'	α
0	0	$\pm\sqrt{2}$	54° 45′
$-a$	0	∞	90
$+2a$	0	∞	90
$1{,}44a$	$1{,}68a$	0	0
$-0{,}69a$	$0{,}63a$	0	0

(Siehe Figur 17.)



Figur 17.

Es wird $y' = \dfrac{4a^2 + 3ax - 4x^2}{2a\sqrt{(a+x)(2a-x)}} = 0$ für $x = \dfrac{a}{8}\left[3 \pm \sqrt{73}\right]$

$$\mathfrak{J} = \int y\,dx = \int \frac{x}{a}\sqrt{(a+x)(b-x)}\,dx$$

$$= \int \frac{x}{a}\sqrt{\frac{(a+b)^2}{4} - \frac{(a-b+2x)^2}{4}}\,dx$$

$$= \frac{1}{2a}\int x\sqrt{(a+b)^2 - (a-b+2x)^2}\,dx.$$

Nun setze man $(a - b + 2x)^2 = y$, dann ist

$$x\,dx = \frac{dy}{8} - \frac{a-b}{2}\,dx$$

$$\mathfrak{J} = \frac{1}{16a}\int \sqrt{(a+b)^2 - y}\,dy - \frac{a-b}{4a}\int \sqrt{(a+b)^2 - (a-b+2x)^2}\,dx.$$

Die Lösung des ersten Integrals ist

$$\mathfrak{J}_{\mathrm{I}} = -\frac{1}{3a}\left(\sqrt{(a+x)(b-x)}\right)^3$$

Die Lösung des zweiten Integrals ist

$$\mathfrak{J}_{\mathrm{II}} = \frac{(b-a)(a-b+2x)}{8a}\cdot\sqrt{(a+x)(b-x)}$$

$$+ \frac{(b-a)(a+b)^2}{16a}\arcsin\frac{a-b+2x}{a+b},$$

wobei man die Substitution $(a - b + 2x) = z$ anwenden kann.

Die gesuchte Fläche ist dann:

$$\mathcal{J} = 2\int_0^b y\,dx + 2\int_0^{-a} y\,dx.$$

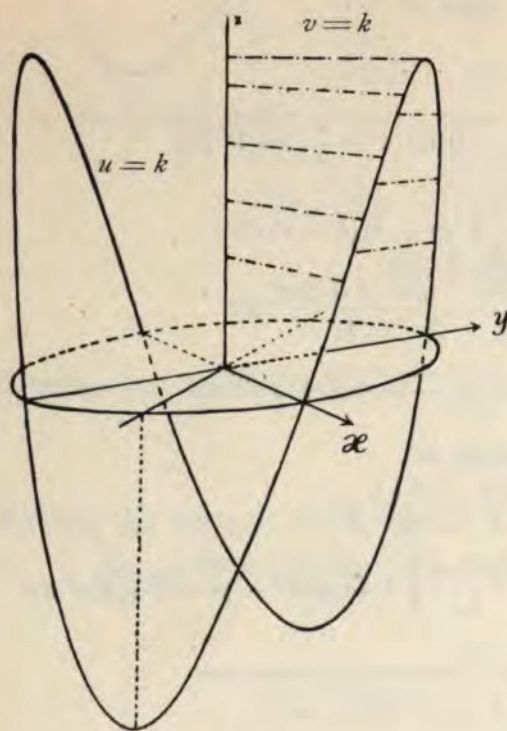
Für $a = 2$, $b = 4$ erhält man $\mathcal{J} = 21\ \text{cm}^2$.

27. Aufgabe.

$$x = u \cdot \cos v \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{I.}$$
$$y = u \cdot \sin v \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{II.}$$
$$z = m \sin 2v \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{III.}$$

1. Um den Verlauf der Linien $u =$ konstant festzustellen, eliminiere man v aus I.) und II.) und erhält

$$x^2 + y^2 = u^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{IV.}$$



Figur 18.

Diese Gleichung ist die eines Kreises mit dem Radius u. Die Raumkurve $u = k$ projiziert sich also in die xy-Ebene als Kreis. Um einzelne Punkte der Raumkurve zu erhalten, läßt man v in I.), II.), III.) variieren. Eine solche Kurve ist in Figur 18 gezeichnet. Durch Elimination von u aus I.) und II.) ergibt sich

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} v.$$

Diese Gleichung stellt eine durch die z-Achse gehende und zur xy-Ebene parallele Gerade vor. Die Fläche wird also auch gebildet durch Gerade, welche sich drehen und gleichzeitig längs der z-Achse auf und nieder gleiten. (Siehe Figur.)

2. Es folgt daraus, daß die Linien $u =$ konstant und $v =$ konstant senkrecht aufeinander stehen. Bestätigt wird dieses Resultat dadurch, daß $F = 0$ wird; denn

$$F = \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial z}{\partial v}$$
$$= -u \sin v \cos v + u \sin v \cdot \cos v = 0.$$

3. Das Linienelement ist bestimmt durch

$$ds^2 = E\,du^2 + G\,dv^2 + 2F\,du\,dv.$$

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 = \cos^2 v + \sin^2 v = 1$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 = u^2 \sin^2 v + u^2 \cos^2 v + 4 m^2 \cos^2 2v$$
$$= u^2 + 4 m^2 \cos^2 2v.$$

$$F = 0.$$

Also ist $$ds^2 = du^2 + (u^2 + 4 m^2 \cos^2 2v)\, dv^2.$$

4. Die Richtungscosinus der Normalen sind

$$\cos\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}; \quad \cos\beta = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}};$$

$$A = \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v} \cdot \frac{\partial z}{\partial u} = 2 m \sin v \cos 2v$$

$$B = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} = -2 m \cos v \cos 2v$$

$$C = \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} = u$$

$$A^2 + B^2 + C^2 = u^2 + 4 m^2 \cos^2 2v.$$

5. 2·I.)·II.) gibt

$$2xy = 2u^2 \sin v \cos v = u^2 \cos 2v,$$

aus III.) substituiert

$$2xy = \frac{u^2 z}{m},$$

aus IV.) substituiert

$$2\ mxy = (x^2 + y^2)\, z.$$

28. Aufgabe.

$$\text{I.} \quad \frac{dy}{dt} = x \quad \ldots\ldots \quad 1.$$

$$\frac{dx}{dt} = -y \quad \ldots\ldots \quad 2.$$

$$\frac{dz}{dt} = k \quad \ldots\ldots \quad 3.$$

Man differentiert Gleichung 2.) und setzt aus 1.) ein:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -x.$$

Die Differentialgleichung zweiter Ordnung wird gelöst mittels der charakteristischen Gleichung

$$r^2 + 1 = 0$$
$$r_1 = i$$
$$r_2 = -i.$$

Die Lösung lautet

$$x = A \sin t + B \cos t.$$

Analog findet man

$$y = A' \sin t + B' \cos t.$$

Um A' und B' zu bestimmen, benützt man Gleichung 1.):

$$A' \cos t - B' \sin t \equiv A \sin t + B \cos t;$$

also ist

$$A = -B'$$
$$B = A'$$

und man hat die Kurvenschar

$$x = A \sin t + B \cos t \qquad 4.$$
$$y = B \sin t - A \cos t \qquad 5.$$
$$z = kt + C \qquad 6.$$

Quadriert und addiert man 4.) und 5.), so ergibt sich

$$x^2 + y^2 = A^2 + B^2 \qquad 7.$$

d. h. die Kurven verlaufen schraubenartig auf Kreiszylindern. (Vergl. hiezu Aufgabe 47 Seite 58, und Figur 29 Seite 59.)

II. Soll die Kurve durch den Punkt $x = 1$, $y = 1$ gehen, so muß

$$A^2 + B^2 = 2$$

gesetzt werden; wählt man nun der Vereinfachung der Rechnung halber noch $A = 0$, so folgt $B = \sqrt{2}$; ebenso kann man $C = 0$ annehmen.

$$x = \sqrt{2} \cos t \qquad 8.$$
$$y = \sqrt{2} \sin t \qquad 9.$$
$$z = kt = \frac{4}{\pi} \cdot t \qquad 10.$$

k bestimmt sich daraus, daß t für $x_1 = 1$, $y_1 = 1$ den Wert $t_1 = \frac{\pi}{4}$ annimmt, also für $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$ die Gleichung besteht

$$1 = k \cdot \frac{\pi}{4} \quad \text{oder} \quad k = \frac{4}{\pi}$$

Nun ist für $x + y = 0$

$$\sqrt{2}\,(\sin t + \cos t) = 0$$
$$t_2 = \frac{3\pi}{4}$$

also Zeit des Weges

$$T = t_2 - t_1 = \frac{\pi}{2}.$$

III. Ferner
$$x_2 = \sqrt{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = -1$$
$$y_2 = 1$$
$$z_2 = 3$$

Würde man die Rechnung allgemein durchführen, so fänden sich folgende Resultate:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg} t_1 &= \frac{B+A}{B-A} \\ \operatorname{tg} t_2 &= \frac{A-B}{A+B} \end{aligned}\right\} \text{negativ reziprok.}$$

Daraus
$$t_2 - t_1 = \frac{\pi}{2},$$

ferner
$$x_2 = -1$$
$$y_2 = +1$$
$$z_2 = 1 + k \cdot \frac{\pi}{2}.$$

29. Aufgabe.

1. $$x^2 + y^2 = r^2.$$

Die gesuchten Koordinaten sind:

P: $x = r \cos\lambda$ $\qquad y = r \sin\lambda$

P': $x = r \cos 2\lambda$ $\qquad y = r \sin 2\lambda$

M: $x = \frac{r}{2}(\cos\lambda + \cos 2\lambda)$ $\qquad y = \frac{r}{2}(\sin\lambda + \sin 2\lambda)$.

2. Die Gleichung des geometrischen Ortes von M läßt sich leicht in Polarkoordinaten aufstellen. (Figur 19 Seite 40.)

$$x^2 + y^2 = \frac{r^2}{4}\left[\begin{aligned} &\cos^2\lambda + \cos^2 2\lambda + 2\cos\lambda \cdot \cos 2\lambda \\ +&\sin^2\lambda + \sin^2 2\lambda + 2\sin\lambda \cdot \sin 2\lambda \end{aligned}\right]$$
$$\rho^2 = \frac{r^2}{2}(1 + \cos\lambda) = r^2 \cos^2\frac{\lambda}{2}$$
$$\rho = r \cdot \cos\frac{\lambda}{2}.$$

Der Winkel φ des Radiusvektor OM ist aber gleich $\frac{3}{2}\lambda$, also lautet die Kurvengleichung
$$\rho = r \cdot \cos\frac{\varphi}{3} \quad \text{(Kardioide).}$$

3. $$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\lambda}}{\frac{dx}{d\lambda}} = \frac{\cos\lambda + 2\cos 2\lambda}{-\sin\lambda - 2\sin 2\lambda}.$$

Es ist

$$\frac{dy}{dx} = 0 \text{ für } \cos\lambda + 2\cos 2\lambda = 0$$

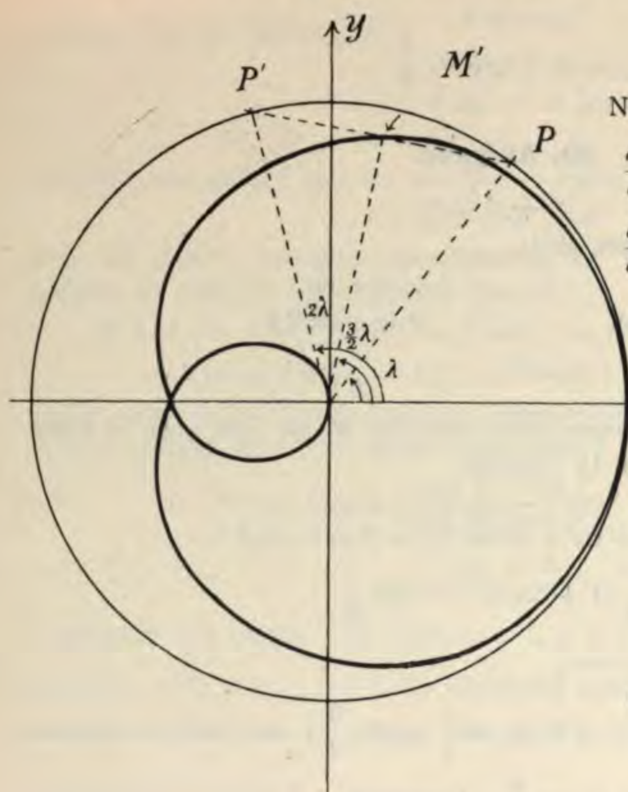
$$\frac{dy}{dx} = \infty \text{ für } \sin\lambda + 2\sin 2\lambda = 0.$$

Aus diesen trigonometrischen Gleichungen ergeben sich folgende Lösungen:

$$\frac{dy}{dx} = 0 \text{ für } \cos\lambda = -\frac{1}{8}(1 \pm \sqrt{33}) = \begin{cases} -0{,}843 \\ +0{,}593 \end{cases}$$

$$\frac{dy}{dx} = \infty \text{ für } \sin\lambda = 0 \text{ oder } \cos\lambda = -\frac{1}{4}.$$

4. Zur Berechnung des Krümmungsradius hat man die Formel



Figur 19.

$$\rho = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}.$$

Nun ist

$$\frac{dy}{d\lambda} = \frac{r}{2}(\cos\lambda + 2\cos 2\lambda)$$

$$\frac{dx}{d\lambda} = -\frac{r}{2}(\sin\lambda + 2\sin 2\lambda).$$

Da sich bei der folgenden Rechnung die Klammerausdrücke wiederholen, so bezeichne man $(\cos\lambda + 2\cos 2\lambda)$ mit C und $(\sin\lambda + 2\sin 2\lambda)$ mit S; dann ist

$$y' = -\frac{C}{S}$$

$$(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{(C^2 + S^2)^{\frac{3}{2}}}{S^3}$$

$$y'' = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{d\lambda} \cdot \frac{d\lambda}{dx}$$

$$= \frac{SC' - CS'}{S^2} \cdot \frac{1}{\frac{r}{2}S} = \frac{SC' - CS'}{\frac{r}{2}S^3}.$$

Im Punkte A ist $\lambda = 0$, also

$$S = \sin\lambda + 2\sin 2\lambda = 0 \quad \text{für } \lambda = 0$$
$$S' = \cos\lambda + 4\cos 2\lambda = 5 \quad ,, \quad ,,$$
$$C = \cos\lambda + 2\cos 2\lambda = 3 \quad ,, \quad ,,$$
$$C' = -\sin\lambda - 4\sin 2\lambda = 0 \quad ,, \quad ,,$$

so daß man schließlich hat

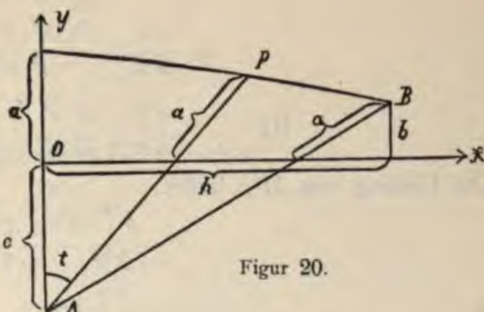
$$\rho = \frac{(S^2 + C^2)^{\frac{3}{2}} \cdot r}{(S C' - C S') \cdot 2} = \frac{9}{10} r.$$

Diese Resultate ergeben sich leichter und kürzer durch Diskussion der Kurve $\rho = r \cos\frac{\varphi}{3}$.

30. Aufgabe.

1. Aus Figur 20 ersieht man

$$x = 0C + CP_1 = c \operatorname{ctg} t + a \sin t$$
$$y = PP_1 = a \cos t.$$



Figur 20.

2. $$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-a \sin t}{\frac{c}{\cos^2 t} + a \cos t}.$$

Für $x = h$, $y = b$ ist

$$h = c \operatorname{tg} t + a \sin t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{I.}$$
$$b = a \cos t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{II.}$$

Aus I.) und II.) ergibt sich

$$\frac{h}{a} = \frac{c \sin t}{a \cos t} + \sin t = \frac{c \sin t}{b} + \sin t$$

$$\sin t = \frac{h \cdot b}{a(b + c)};$$

$$\frac{dy}{dx}_{\substack{x=h\\y=b}} = \frac{-hb}{(b + c)\left(\frac{a^2 c}{b^2} + b\right)} = -\frac{h b^3}{(b + c)(a^2 c + b^3)}.$$

3. $$V = \pi \int_0^h y^2\, dx$$

$$= \pi \int_{t=0}^{t=\arccos\frac{a}{b}} a^2 \cos^2 t \left(\frac{c}{\cos^2 t} + a \cos t\right) dt$$

$$= a^2 \pi \left[c t + a\left(\sin t - \frac{1}{3}\sin^3 t\right)\right]_{t=0}^{\cos t = \frac{b}{a}}$$

$$= a^2 \pi \left[c \arccos\frac{b}{a} + \frac{hb}{b + c}\left(1 - \frac{h^2 b^2}{3 a^2 (b + c)^2}\right)\right].$$

31. Aufgabe.

$$\text{I.} \qquad z = \frac{x^4}{2a^2} + \frac{y^4}{2b^2}.$$

1. Die Schnittkurven mit Horizontalebenen projizieren sich in die xy-Ebene als eine Schar von Kurven vierter Ordnung. z ist Parameter.

$$\text{II.} \qquad \frac{x^4}{2a^2 z} + \frac{y^4}{2b^2 z} = 1.$$

Die Projektionen der Fallinien in die xy-Ebene sind die Orthogonaltrajektorien der Kurvenschar II.); also

$$\frac{4x^3\,dx}{2a^2 z} = -\frac{4y^3\,dy}{2b^2 z}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x^3 \cdot b^2}{a^2 \cdot y^3} \quad \text{(Differentialgleichung von II.)}$$

$$\text{III.} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{a^2 y^3}{b^2 x^3} \quad \text{(Differentialgleichung der Orthogonaltrajektorien.)}$$

Die Lösung von III.) lautet:

$$\frac{b^2}{-2y^2} - \frac{a^2}{-2x^2} - k = 0$$

oder:

$$\text{IV.} \qquad x^2 b^2 - y^2 a^2 + c x^2 y^2 = 0.$$

(c ist Parameter.)

Gleichung IV.) stellt die Schar der Orthogonaltrajektorien dar. Als Flächenschar betrachtet stellt die Gleichung IV.) zusammen mit I.) die Fallinien dar. Die Projektionen von II.) und IV.) sind in Figur 21 skizziert.

Die Differentialgleichung von IV.) ist III.), d. i.:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a^2 y^3}{b^2 x^3}.$$

Figur 21

Sie nimmt für $x = 0$, $y = 0$ den Wert $\frac{0}{0}$ an, d. h. die Kurvenschar III.) hat im Nullpunkt einen Doppelpunkt. Es besteht an der Stelle $x = 0$, $y = 0$ die Beziehung

[illegible]

Dadurch ist die Richtung der Kurven im Nullpunkt gegeben; da dieser Ausdruck vom Parameter c unabhängig ist, haben sämtliche Kurven IV.) die gemeinsame Tangente

$$y = \pm x \sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^3}.$$

32. Aufgabe.

$$x \cos t + y \sin t - a \sin 2t = 0 \quad \ldots \quad 1.$$

Man differentiere nach x:

$$\frac{dy}{dx} = -\operatorname{cotg} t \quad \ldots \quad 2.$$

Aus 1.) und 2.) eliminiere man t; man erhält

$$-x \cdot \frac{dy}{dx} + y + \frac{2a \frac{dy}{dx}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = 0 \quad \ldots \quad 3.$$

3.) ist die Differentialgleichung der gegebenen Kurvenschar.

In 3.) setze man für den $\frac{dy}{dx}$ den Wert $-\frac{dx}{dy}$ ein.

$$x + y \frac{dy}{dx} - \frac{2a \frac{dy}{dx}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = 0 \quad \ldots \quad 4.$$

4.) ist die Differentialgleichung der Orthogonaltrajektorien: für $\frac{dy}{dx} = p$ ergibt sich die Form der allgemeinen Clairaultschen Differentialgleichung.

$$x + y \cdot p - \frac{2ap}{\sqrt{1+p^2}} = 0 \quad \ldots \quad 5.$$

Lösung von 5.). Man differentiere nach x

$$1 + p^2 + y \frac{dp}{dx} - \frac{2a \cdot \frac{dp}{dx}}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} = 0 \quad \ldots \quad 6.$$

Setze y aus 5.) in 6.) ein:

$$1 + p^2 + \left(\frac{2a}{\sqrt{1+p^2}} - \frac{x}{p}\right)\frac{dp}{dx} - \frac{2a \frac{dp}{dx}}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} = 0 \quad \ldots \quad 7.$$

Löse nach $\frac{dx}{dp}$ auf:

$$\frac{dx}{dp} = \frac{x}{p(1+p^2)} - \frac{2ap^2}{(1+p^2)^{\frac{5}{2}}} \quad \ldots \quad 8.$$

Die Gleichung 8.) ist linear; man löst sie durch die Substitution $x = u \cdot v$ und erhält

a) $$\frac{dv}{dp} = \frac{v}{p(1+p^2)}$$

$$v = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}};$$

b) $$v\frac{du}{dp} + \frac{2ap^2}{(1+p^2)^{\frac{5}{2}}} = 0$$

$$u = \frac{a}{1+p^2} + k$$

$$x = u \cdot v = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\left(\frac{a}{1+p^2} + k\right) \quad \ldots \ldots \ldots \quad 9.$$

Durch Substitution von 9.) in 5.) erhält man

$$y = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}\left(2a - k - \frac{a}{1+p^2}\right) \quad \ldots \ldots \quad 10.$$

9.) und 10.) ist die Schar der gesuchten Orthogonaltrajektorien in Parameterdarstellung.

33. Aufgabe.

Diskussion der Kegelschnittgleichung (vergl. Aufg. 25, I.)

$$F(xy) = x^2\left(\frac{\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\sin^2\varphi}{b^2}\right) + 2xy\cos\varphi \cdot \sin\varphi\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)$$
$$+ y^2\left(\frac{\sin^2\varphi}{a^2} + \frac{\cos^2\varphi}{b^2}\right) - 1 = 0.$$

1. Mittelpunkt.

Die Mittelpunktskoordinaten erhält man durch Berechnung von x und y aus

$$\frac{\partial F}{\partial x} \equiv 2x\left(\frac{\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\sin^2\varphi}{b^2}\right) + 2y\sin\varphi\cos\varphi\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} \equiv 2x\sin\varphi\cos\varphi\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right) + 2y\left(\frac{\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\sin^2\varphi}{b^2}\right) = 0.$$

Es ergibt sich $\quad x = 0, \quad y = 0.$

2. Achsenrichtung.

Wenn α der Winkel zwischen x-Achse und der großen Ellipsenachse bezeichnet, so besteht die Beziehung

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2B}{A - C} = \frac{2\sin\varphi\cos\varphi\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)}{\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)} = \operatorname{tg} 2\varphi;$$

folglich ist $\quad \alpha = \varphi.$

3. Die Größe der Halbachsen ergibt sich mittels der Formeln:

$$\frac{\xi^2}{\frac{\Delta}{\lambda_1 (AC - B^2)}} + \frac{\eta^2}{\frac{\Delta}{\lambda_2 (AC - B^2)}} - 1 = 0.$$

Darin ist

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} = \left(\frac{\cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{b^2}\right)\left(\frac{\sin^2 \varphi}{a^2} + \frac{\cos^2 \varphi}{b^2}\right)$$

$$- \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)^2 = \frac{1}{a^2 b^2};$$

ferner

$$AC - B^2 = \frac{1}{a^2 b^2};$$

λ_1 und λ_2 sind die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$\lambda^2 - (A + C)\lambda + (AC - B^2) = 0,$$

d. i. im vorliegenden Falle

$$\lambda_1 = \frac{1}{a^2} \text{ und } \lambda_2 = \frac{1}{b^2}.$$

Die Größen der Halbachsen sind also a und b. Die vorgelegte Kegelschnittgleichung I. ist das Resultat der durch die Substitution

$$\xi = x \cos \varphi + y \sin \varphi$$
$$\eta = y \cos \varphi - x \sin \varphi$$

transformierten Gleichung

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Gleichung I.) stellt also für verschiedene Werte von φ eine Schar von kongruenten, konzentrischen Ellipsen dar, die um den Winkel φ gegen die x-Achse gedreht sind.

34. Aufgabe.

$$\text{1.} \qquad y\,[(y - 2)^2 - x^2] - 1 = 0.$$

Die Schnittpunkte mit der y-Achse erhält man durch Einsetzen von $x = 0$ in I.) Eine Wurzel der sich ergebenden Gleichung dritten Grades

$$y^3 - 4y^2 + 4y - 1 = 0$$

findet man durch Erraten, nämlich $y_1 = 1$.

Aus

$$y_2 + y_3 = 3$$
$$y_2 \cdot y_3 = 1$$

ergibt sich

$$y_2 = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5})$$

$$y_3 = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5}).$$

2. Die Asymptotenrichtungen ergeben sich aus den Gliedern höchsten Grades der Gleichung I.)

$$y(y^2 - x^2) = 0$$
$$1.\quad y = 0$$
$$2.\quad y = x$$
$$3.\quad y = -x.$$

Man hat also bereits die Richtungen; der Abschnitt q auf der y-Achse findet sich aus der Tangentengleichung

$$y - y_1 = (x - x_1)\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x = x_1}$$

als

$$q = \left(y - x\frac{dy}{dx}\right)_{\substack{x=\infty \\ \text{oder } y=\infty}}$$

Es ist

$$y - x\frac{dy}{dx} = y - \frac{2yx^2}{3y^2 - 8y + 4 - x^2}$$
$$= \frac{3y^3 - 8y^2 + 4y - 3yx^2}{3y^2 - 8y + 4 - x^2} = \frac{4y^3 - 8y^2 + 3y}{2y^3 - 4y^2 + 1}$$
$$= 2 \text{ für } y = \infty.$$

Die drei Asymptotengleichungen lauten also:

$$y = 0$$
$$y = x + 2$$
$$y = -x + 2$$

3.
$$V = \pi \int_{\frac{1}{2}(3-\sqrt{5})}^{1} x^2\,dy = \pi \int_{\frac{1}{2}(3-\sqrt{5})}^{1} \left[-\frac{1}{y} + (y-2)^2\right] dy$$

$$= \pi\left[-\lg y + \frac{1}{3}(y-2)^3\right]_{\frac{1}{2}(3-\sqrt{5})}^{1} = 0{,}362\ [\mathrm{cm}^3].$$

4.
$$y_s = \frac{\pi \int_{\frac{1}{2}(3-\sqrt{5})}^{1} y \cdot x^2 \cdot dy}{V} = \left[\frac{\frac{y^4}{4} - \frac{4}{3}y^3 + 2y^2 - y}{\frac{1}{3}(y-2)^3 - \lg y}\right]_{0,381}^{1} = 0{,}65.$$

35. Aufgabe.

1. Die Gleichung der Parabel, welche symmetrisch zur z-Achse und deren Scheitel auf der z-Achse um die Strecke a verschoben ist, hat die Form

$$x^2 = 2p(z + a).$$

Die Konstante p und a lassen sich mittels der gegebenen Punkte $R\ (0, \eta^2)$ und $C\ (\sqrt{2\eta}, 0)$ bestimmen. η ist als Konstante zu betrachten.

$$\text{I.}\quad 0 = 2p(\eta^2 + a)$$

$$\text{II.}\quad 2\eta = 2pa.$$

$$\text{Aus I.}\quad a = -\eta^2$$

$$\text{Aus II.}\quad p = -\frac{1}{\eta}.$$

Die gesuchte Parabelgleichung lautet

$$x^2 = -\frac{2}{\eta}(z - \eta^2).$$

Betrachtet man nun η als Variable $(= y)$, so ergibt sich die Flächengleichung

$$x^2 y = 2(y^2 - z).$$

2. Die Schnittkurven der Fläche mit Ebenen parallel zu den Koordinatenebenen sind:

$x = k$	$k^2 y = 2(y^2 - z)$	Parabel
$y = k$	$k x^2 = 2(k^2 - z)$	Parabel
$z = k$	$x^2 y = 2(y^2 - k)$	Kurve dritter Ordnung.

3. Der Volumeninhalt des Körpers läßt sich berechnen durch Summierung der Parabelflächen längs der y- oder längs der x-Achse.

I. Ein Querschnitt in der Ebene $y = \eta$ hat die Gleichung

$$x^2 = -\frac{2}{\eta}(z - \eta^2).$$

Das in Betracht kommende Flächenstück hat die Größe

$$F = 2\int_0^{\sqrt{2\eta}} z\,dx = 2\int_0^{\sqrt{2\eta}} \left[-\frac{\eta x^2}{2} + \eta^2\right] dx = \frac{4}{3}\eta^2\sqrt{2\eta}\ [\text{cm}^2].$$

Das Volumen berechnet sich dann aus

$$V = \int_0^2 F\,dy = \int_0^2 \frac{4}{3} y^2 \sqrt{2y}\,dy = \frac{4\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{2}{7}\cdot 8\sqrt{2} = \frac{128}{21}\ [\text{cm}^3].$$

Oder II.: Ein Querschnitt in der Ebene $x = x$ hat die Gleichung

$$x^2 y = 2(y^2 - z).$$

Das in Betracht kommende Flächenstück hat die Größe

$$F = \int_{y=\frac{x^2}{2}}^{y=2} z\,dy = \int_{\frac{x^2}{2}}^{2} \left[y^2 - \frac{x^2 y}{2}\right] dy.$$

Das Volumen berechnet sich dann aus

$$V = \int_{-2}^{+2} F\,dx = \int_{-2}^{-2}\int_{\frac{x^2}{2}}^{2} \left[y^2 - \frac{x^2 y}{2}\right] dy\,dx = \frac{128}{21}\ [\text{cm}^3].$$

36. Aufgabe.

$$\text{I.} \qquad y'' - \frac{2}{x} y' + 6 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1.$$

Man setze $y' = p$; dann ist $y'' = \frac{dp}{dx}$

$$\frac{dp}{dx} - \frac{2}{x} p + 6 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 2.$$

Gleichung 2.) ist homogen. Man setzt deshalb

$$\frac{p}{x} = z \qquad \frac{dp}{dx} = z + x\frac{dz}{dx}$$

$$z + x\frac{dz}{dx} = 2z - 6 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 3.$$

$$x\,dz = (z - 6)\,dx.$$

Gleichung 3.) ist separierbar.

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{z - 6}.$$

Lösung: $$x c_1 = z - 6 = \frac{p}{x} - 6$$

ferner: $$6x + x^2 c_1 = \frac{dy}{dx}$$

Lösung: $$y = k_1 x^3 + 3x^2 + k_2.$$

II. k_2 ist in dem zweifach unendlichem Kurvensystem Verschiebungsgröße; man kann dieselbe also bei der Diskussion der Gestalt der Integralkurven weglassen. Es ist dann

$$y = k_1 x^3 + 3x^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad a)$$

$$y' = 3k_1 x^2 + 6x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad b)$$

$$y'' = 6k_1 x + 6 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad c)$$

Aus a) folgt: Die Kurven schneiden die x-Achse in den Punkten

$$x^2 = 0$$

$$x = -\frac{3}{k_1}.$$

Aus b) folgt: Die Kurven schneiden die y-Achse horizontal und haben außerdem für $x = -\frac{2}{k_1}$ eine Horizontaltangente.

Aus c) folgt: $x = 0$ ist Minimum der Kurve.

$x = -\frac{2}{k_1}$ ist Maximum der Kurve.

$x = -\frac{1}{k_1}$ ist Wendepunkt der Kurve.

III. Der geometrische Ort der Wendepunkte ist bestimmt durch die Gleichungen

$$y = k_1 x^3 + 3x^2 \quad \text{aus a)}$$

$$x = -\frac{1}{k_1} \quad \text{aus c)}$$

oder durch Einsetzen von y' in 1.). Es ergibt sich

$$y = 2x^2.$$

Ebenso ergibt sich als geometrischer Ort der Maxima

$$y = x^2.$$

IV. Die Integralkurven, welche die x-Achse berühren, haben in den Berührungspunkten horizontale Tangentenrichtungen, d. h.

$$y' = 3k_1 x^2 + 6x = 0,$$

folglich

$$x = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1.$$

$$x = -\frac{2}{k_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 2.$$

1.) Für $x = 0$ ist für $k_2 = 0$ auch $y = 0$.

2.) Für $x = -\frac{2}{k_1}$ wird $y = 0$, wenn

$$0 = k_1 \cdot \left(-\frac{8}{k_1^3}\right) + 3 \cdot \frac{4}{k_1^2} + k_2,$$

d. h.

$$k_2 = -\frac{4}{k_1^2}.$$

Die verlangte Bedingung wird demnach erfüllt durch die beiden Kurvenscharen:

$$y = k_1 x^3 + 3x^2$$

$$y = k_1 x^3 + 3x^2 - \frac{4}{k_1^2}.$$

37. Aufgabe.

Man quadriert zweimal die Gleichung, um die Wurzel wegzuschaffen, und erhält nach Vereinfachung

$$(x - y)^2 - 2a(x + y) + a^2 = 0.$$

Die Gleichung stellt einen Kegelschnitt dar. Zur Diskussion vergleiche man Aufgabe 33, 2.) und Aufgabe 25. Man findet für die Achsenrichtung den Winkel 45°. Deshalb drehe man noch um 45° mittels der Transformationsformel

Figur 22.

$$x = \xi \cos 45 - \eta \sin 45 = (\xi - \eta) \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$y = \xi \sin 45 + \eta \cos 45 = (\xi + \eta)\frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

Es ergibt sich
$$\eta^2 = a\sqrt{2}\left(\xi - \frac{a}{2\sqrt{2}}\right).$$

Diese Gleichung ist die einer Parabel mit dem Scheitel $\xi = \frac{a}{2\sqrt{2}}$; $\eta = 0$ und der Brennweite $\frac{a\sqrt{2}}{4}$.

Für $x = 0$ wird $y = a$.
Für $y = 0$ wird $x = a$, d. h. die Parabel berührt die Achsen. (Fig. 22 S. 49.)

38. Aufgabe.

Es ist
$$x = a\cos^5 t; \qquad y = a\sin^5 t$$

$$\frac{dx}{dt} = -5a\cos^4 t \sin t; \quad \frac{dy}{dt} = 5a\sin^4 t\cos t$$

$$\frac{dy}{dx} = -\operatorname{tg}^3 t = y'$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{3\sin t}{5a\cos^8 t}$$

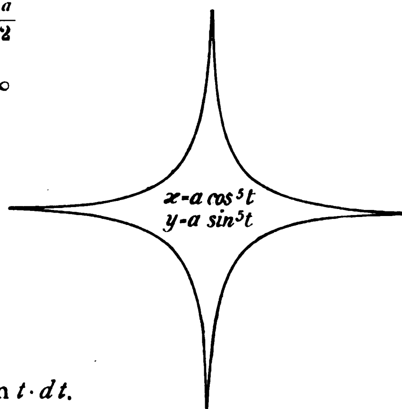
$$\rho = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = -\frac{5a(\cos^6 t + \sin^6 t)^{\frac{3}{2}}}{3\sin t\cdot\cos t}$$

Dadurch erhält man folgende Zusammenstellung:

t	x	y	y'	ρ
0	a	0	0	∞
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{a\sqrt{2}}{8}$	$\frac{a\sqrt{2}}{8}$	-1	$\frac{5a}{12}$
$\frac{\pi}{2}$	0	a	∞	∞

Die Länge der Kurve ist
$$s = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

$$= +5a\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\cos^6 t + \sin^6 t}\cdot\cos t\cdot\sin t\cdot dt.$$



Figur 23.

1. Substitution: $\sin^2 t = z$ gibt ausgerechnet

$$s = \frac{5a}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 - 3z + 3z^2}\, dz$$

$$= \frac{5a}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{4} + 3\left(z - \frac{1}{2}\right)^2}\, dz.$$

2. Substitution: $\sqrt{3}\left(z - \frac{1}{2}\right) = u$

$$s = \frac{5a}{2\sqrt{3}}\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{0} \sqrt{\frac{1}{4} + u^2}\, du$$

$$s = \frac{5a}{2\sqrt{3}}\left[\frac{u}{2}\sqrt{\frac{1}{4} + u^2} + \frac{1}{8}\lg u + \sqrt{\frac{1}{4} + u^2}\right]_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{0}$$

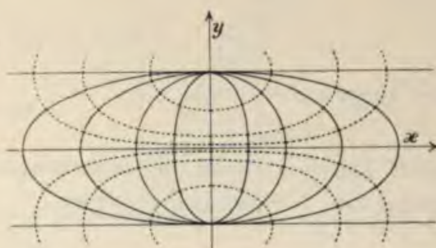
$$= \frac{5a}{8\sqrt{3}}\left[\frac{1}{2}\lg(2 + \sqrt{3}) + \sqrt{3}\right].$$

39. Aufgabe.

1. $\frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ (Gleichung der Ellipsenschar)

2. $\frac{x^2}{(\lg z)^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ (Gleichung der Fläche)

3. $V = \pi \int_1^0 \cdot b \cdot \lg z\, dz = b\pi \left[z \lg z - z\right]_1^0$
$= b\pi\,[\text{cm}^3]$.



Figur 24.

Hiebei ist $\lim z \lg z$ für $z = 0$ gleich $0 \cdot -\infty$ d. h. unbestimmt.

Für $z = 0$ ist $\lim z \lg z = \lim \frac{\lg z}{\frac{1}{z}} = \frac{\frac{1}{z}}{-\frac{1}{z^2}} = -z = 0.$

4. Aus 1.) findet man durch Differentiation

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x b^2}{\lambda^2 y} = \frac{-(b^2 - y^2)}{x \cdot y}$$ (Differentialgleichung von 1.)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{b^2 - y^2}$$ (Gleichung der Orthogonaltrajektorien)

Die Gleichung ist separierbar. Lösung:

5. $x^2 = 2b^2 \lg y - y^2 + k.$

Gleichung 5.) und 2.) stellen zusammen die Fall-Linien dar. (Figur 24.)

40. Aufgabe.

Die gegebene Differentialgleichung wird auf die gleiche Art integriert, wie Aufgabe 16. Man findet

1. $y = 3\cos x + \sin x + c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{2x}$.

Um die spezielle Kurve zu finden, setze man in y, y', y'' für x den Wert 0 ein; dann müssen diese Funktionen selbst 0 werden. Es ergibt sich

$$0 = 3 + c_1 + c_2 + c_3 \quad \dots \dots \dots \quad 1.$$
$$0 = 1 + c_2 + 2c_3 \quad \dots \dots \dots \quad 2.$$
$$0 = -3 + c_2 + 4c_3 \quad \dots \dots \dots \quad 3.$$

Aus diesen drei Gleichungen findet man

$$c_1 = 0, \quad c_2 = -5, \quad c_3 = 2,$$

so daß die verlangte Kurve die Gleichung hat:

2. $y = 3\cos x + \sin x - 5e^x + 2e^{2x}$.

Entwickelt man die einzelnen Funktionen in Reihen bis zur vierten Potenz von x, so ist

$$y = 3\left(1 - \frac{x^2}{2!}\right) + \left(x - \frac{x^3}{3!}\right) - 5\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}\right)$$
$$+ 2\left(1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^3}{3!}\right)$$

oder ausgerechnet

$$y = \frac{5}{3} x^3.$$

Durch Kurve 3.) wird der näherungsweise Verlauf der Kurve 2.) in der Umgebung des Nullpunktes gegeben.

41. Aufgabe.

Die 1. Frage soll nach der 2. und 3. Frage behandelt werden. Zur Beantwortung von 2.) und 3.) bildet man vor allem den 1. und 2. Differentialquotienten der gegebenen Funktion. (Figur 25 Seite 53.)

1. $y = 1 + x - \frac{\cos 2x}{2}$
2. $y' = 1 + \sin 2x$
3. $y'' = 2\cos 2x$.

Horizontaltangenten:

Aus 2.) folgt $\frac{dy}{dx} = 0$ für $\sin 2x = -1$, d. i. für $x = (4n - 1)\frac{\pi}{4}$;

die zugehörigen Ordinaten sind nach Gleichung 1.):

4. $y = 1 + x = 1 + (4n - 1)\frac{\pi}{4}$.

Wendepunkte:

Aus 3.) folgt $y'' = 0$ für $\cos 2x = 0$, d. i. für $x = (2n+1)\frac{\pi}{4}$;
die zugehörigen Ordinaten sind nach Gleichung 1.):

$$5. \quad y = 1 + x = 1 + (2n+1)\frac{\pi}{4}.$$

Die Richtungen in diesen Wendepunkten ergeben sich mittels 2.) und $\cos 2x = 0$.

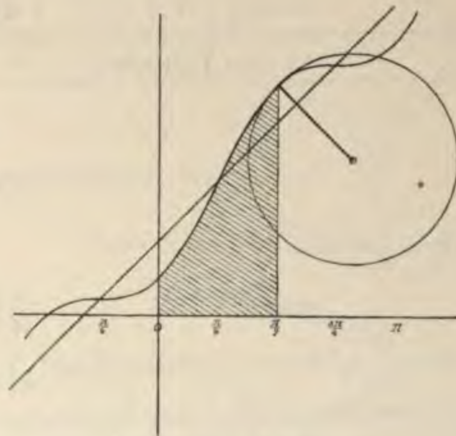
$$\operatorname{tg} \alpha_1 = +2$$
$$\operatorname{tg} \alpha_2 = 0.$$

Die Punkte mit Horizontaltangenten sind also auch Wendepunkte. Ferner ersieht man aus den Gleichungen 4.) und 5.), daß die Punkte mit Horizontaltangenten und die Wendepunkte auf der Geraden $y = 1 + x$ liegen. Daraus ergibt sich leicht die Beantwortung von Frage 1.). Die Kurve schlängelt sich um die Gerade $y = 1 + x$. Zur Zeichnung derselben empfiehlt es sich, noch die Punkte mit $\operatorname{tg} \alpha = 1$ zu bestimmen; es ist dann

$$\frac{dy}{dx} = 1, \text{ d. i. für } \sin 2x = 0$$

oder für $x = \frac{n}{2}\pi$

und mittels 1.) $y = 1 + x \pm \frac{1}{2}$.



Figur 25.

Krümmungsradius:

$$\rho = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''};$$

$$y'_{x=\frac{\pi}{2}} = 1; \; y''_{x=\frac{\pi}{2}} = -2$$

$$\rho_{x=\frac{\pi}{2}} = \frac{2^{\frac{3}{2}}}{-2} = \sqrt{2}.$$

Fläche:

$$F = \int_0^{\frac{\pi}{2}} y\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + x - \frac{\cos 2x}{2}\right) dx = \left[x + \frac{x^2}{2} - \frac{\sin 2x}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi}{8}(4+\pi) \text{ [cm}^2\text{]}.$$

42. Aufgabe.

Die Gleichung der Meridianparabel lautet:

$$(x-4)^2 = 2y \text{ oder } x = 4 \pm \sqrt{2y}.$$

Das Volumen der Spitze ist

$$V = \pi \int_2^8 x^2\, dy = \pi \int_2^8 (16 - 8\sqrt{2y} + 2y)\, dy$$

$$= \pi \left[16y - \frac{16\sqrt{2}}{3} y^{\frac{3}{2}} + y^2\right]_2^8 = \frac{20\pi}{3} \,[\mathrm{cm}^3].$$

Die Oberfläche ist

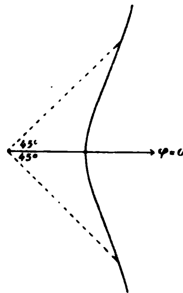
$$O = 2\pi \int x\, ds = 2\pi \int_2^0 x \sqrt{1 + (x-4)^2}\, dx.$$

Substitution: $x - 4 = z$

$$O = 2\pi \left(\int_{-4}^{-2} z\sqrt{1+z^2}\, dz + 4 \int_{-4}^{-2} \sqrt{1+z^2}\, dz \right)$$

$$= 2\pi \left[\frac{1}{3}(1+z^2)^{\frac{3}{2}} + 2 \lg z + \sqrt{1+z^2} + 2z\sqrt{1+z^2}\right]_{-4}^{-2}$$

$= \text{circa } 11{,}3 \,[\mathrm{cm}^2].$



Figur 26.

43. Aufgabe.

Die Kurvengleichung lässt sich leicht auf die Form bringen

$$r = \frac{p}{2\cos^2\varphi}.$$

Ferner ist

$$\frac{dr}{d\varphi} = r' = \frac{p \sin\varphi}{\cos^3\varphi}$$

$$r'' = \frac{p(1 + 2\sin^2\varphi)}{\cos^4\varphi}.$$

1. Für Punkte mit Vertikaltangenten gilt die Bedingung:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{r'}{r} = 2\operatorname{tg}\varphi.$$

Diese Gleichung wird erfüllt durch

$$\varphi = 0$$
$$\varphi = \pi.$$

2.
$$t_s = \frac{r^2}{r'} = \frac{p}{2\sin 2\varphi} = \frac{p}{2} \text{ für } \varphi = \frac{\pi}{4}$$

$$n_s = r' = 2p \text{ für } \varphi = \frac{\pi}{4}$$

$$\rho = \frac{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2r'^2 - r r''}.$$

Für
$$\varphi = \frac{\pi}{4} \text{ ist } \rho = \frac{(p^2 + 4p^2)^{\frac{3}{2}}}{9p^2 - 8p^2} = p \cdot \sqrt{5^3}\ [\text{cm}].$$

3.
$$F = \frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{+\frac{\pi}{4}} r^2\, d\varphi = \frac{p^2}{4}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\varphi}{\cos^4\varphi} = \frac{p^2}{4}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\varphi\,(1 + \operatorname{tg}^2\varphi)}{\cos^2\varphi}$$
$$= \frac{p^2}{4}\int\limits_0^1 (1 + z^2)\, dz = \frac{p^2}{4}\Big[\operatorname{tg}\varphi + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3\varphi\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{p^2}{3}\ [\text{cm}^2].$$

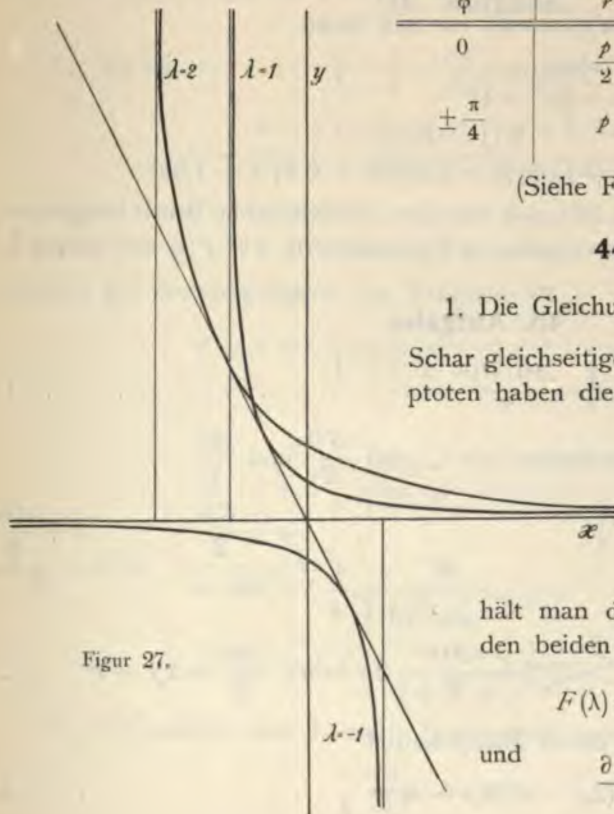
Das Integral $\int \frac{d\varphi}{\cos^4\varphi}$ wird durch die Substitution $\operatorname{tg}\varphi = z$ gelöst.

4. Aus $r = \frac{p}{2\cos^2\varphi}$ ergibt sich $\frac{x^2}{r} = \frac{p}{2}$ und $x^4 = \frac{p^2}{4}(x^2 + y^2)$.

Unter Benutzung obiger Resultate erhält man zum Zwecke der Kurvenzeichnung folgende Resultate:

φ	r	ρ	t_s
0	$\frac{p}{2}$	$\frac{p}{2}$	
$\pm\frac{\pi}{4}$	p	$p \cdot 5^{\frac{3}{2}}$	$\frac{p}{2}$

(Siehe Figur 26 Seite 54.)



Figur 27.

44. Aufgabe.

1. Die Gleichung $y(x + \lambda) = \frac{\lambda^2}{2}$ stellt eine Schar gleichseitiger Hyperbeln dar. Die Asymptoten haben die Gleichungen:

$$y = 0 \quad \text{und} \quad x + \lambda = 0.$$

Der Scheitel hat vom Mittelpunkt die Entfernung λ. (Figur 27.)

2. Die Umhüllende erhält man durch Elimination von λ aus den beiden Gleichungen

$$F(\lambda) = y(x + \lambda) - \frac{\lambda^2}{2} = 0$$

und
$$\frac{\partial F(\lambda)}{\partial \lambda} = y - \lambda = 0.$$

Es ergeben sich die beiden Geraden:

$$y = 0$$

$$y = -2x.$$

3. Die Differentialgleichung findet man durch Elimination von λ aus den beiden Gleichungen:

$$F(yx\lambda) = y(x+\lambda) - \frac{\lambda^2}{2} = 0$$

und

$$\frac{dF(xy\lambda)}{dx} = y + (x+\lambda)\frac{dy}{dx} = 0.$$

Man findet

$$\frac{x}{y} = -\sqrt{-\frac{2}{p}} - \frac{1}{p} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{I.}$$

4. Die Differentialgleichung der Orthogonaltrajektorien lautet:

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{p - \sqrt{2p}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{II.}$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung ist ziemlich langwierig. Man differentiert zuerst nach x und erhält nach einiger Umformung

$$\frac{dx}{x} = \frac{dp\,(\sqrt{2p} - 1)}{(p - \sqrt{2p})(1 + p\sqrt{2p} - p^2)\sqrt{2p}}$$

Nun setze man $\sqrt{2p} = z$, $dp = z\,dz$ ein und findet

$$\frac{dx}{x} = \frac{8(1-z)\,dz}{z(z-2)(z^4 - 2z^3 - 4)}$$

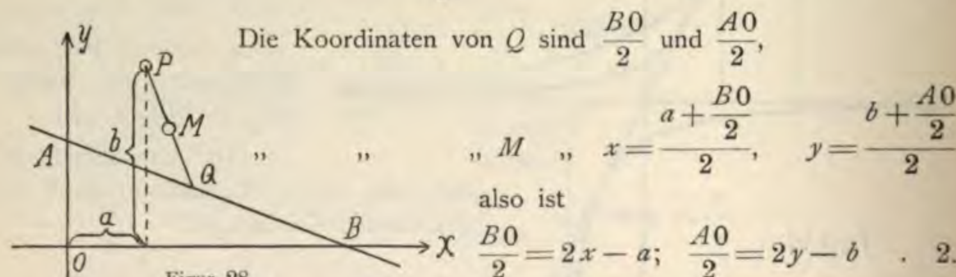
$$= \frac{8(1-z)\,dz}{z(z-2)(z+1{,}09)(z-2{,}32)(z^2 - 0{,}77\,z + 1{,}58)}$$

Mittels Partialbruchzerlegung läßt sich nun der rechtsstehende Bruch integrieren, so daß man die gesuchte Kurvenschar in Parameterform $x = f(z)$ und mittels I.) $y = g(z)$ erhält.

45. Aufgabe.

Es ist

$$\frac{A0 \cdot B0}{2} = c \quad \ldots\ldots\ldots \quad 1.$$



Figur 28.

Die Koordinaten von Q sind $\frac{B0}{2}$ und $\frac{A0}{2}$,

" " " M " $x = \dfrac{a + \frac{B0}{2}}{2}$, $\quad y = \dfrac{b + \frac{A0}{2}}{2}$

also ist

$$\frac{B0}{2} = 2x - a; \quad \frac{A0}{2} = 2y - b \quad . \quad 2.$$

Aus 1.) und 2.) ergibt sich durch Multiplikation

$$(2x - a)(2y - b) = \frac{c}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 3.$$

Gleichung 3.) stellt eine Hyperbel dar, denn

$$AC - B^2 = -4 < 0,$$

ferner geht mittels der Substitution $\xi = x - \frac{a}{2}$, $\eta = y - \frac{b}{2}$ Gleichung 3.) über in

$$\xi \cdot \eta = \frac{c}{8} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 4.$$

Gleichung 4.) ist eine gleichseitige Hyperbel mit den Asymptoten $\xi = 0$, $\eta = 0$, d. i. $x - \frac{a}{2} = 0$, $\eta - \frac{b}{2} = 0$.

Auf die Hauptachsen bezogen, lautet die Gleichung

$$x'^2 - y'^2 = \frac{c}{4},$$

wie sich mittels der Transformation

$$\xi = x' \cos 45 - y' \sin 45$$
$$\eta = x' \sin 45 + y' \cos 45$$

zeigen läßt.

46. Aufgabe.

1. Es ist

$$\frac{\eta - y}{\xi - x} = \frac{dy}{dx} = n a x^{n-1}$$

$$\eta = a x^n - n a x^{n-1} \cdot x + \xi \cdot n a x^{n-1}$$

$$\eta = \xi \cdot n \cdot a x^{n-1} - (n-1) a x^n \quad \ldots \ldots \ldots \quad \text{I.}$$

2. $$u - x = l \cos \alpha$$
$$v - y = l \sin \alpha,$$

wobei α der Neigungswinkel der Tangente ist.

$$u = x + l \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = x + l \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}$$

$$v = y + l \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = a x^n + \frac{l \cdot \frac{dy}{dx}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}$$

oder

$$u = x + l \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + n^2 \cdot a^2 x^{2(n-1)}}}$$

$$v = a x^n + l \cdot \frac{n \cdot a x^{n-1}}{\sqrt{1 + n^2 \cdot a^2 x^{2(n-1)}}}.$$

3. Differentiert man I.) nach ξ, so ergibt sich

$$\frac{d\eta}{d\xi} = n a x^{n-1} \quad \ldots \ldots \ldots \quad \text{II.}$$

Eliminiert man x aus I.) und II.), so erhält man

$$\eta = \xi \frac{d\eta}{d\xi} - a(n-1)\left[\frac{n\,a}{\frac{d\eta}{d\xi}}\right]^{-\frac{n}{n-1}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{III.}$$

III.) ist die Differentialgleichung der Tangentenschar.

4. Die Gleichung der Orthogonaltrajektorien lautet:

$$\eta = -\xi \cdot \frac{1}{\frac{d\eta}{d\xi}} - a(n-1)\left[-n \cdot a \cdot \frac{d\eta}{d\xi}\right]^{-\frac{n}{n-1}}.$$

Setzt man $n = \frac{2}{3}$ und $\frac{d\eta}{d\xi} = p$, so ergibt sich

$$\eta = \xi\left(-\frac{1}{p}\right) + \frac{4a^3}{27} \cdot p^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{IV.}$$

Dies ist eine allgemeine Claira ultsche Gleichung: IV.) nach ξ differentiert, gibt

$$\frac{d\xi}{dp} - \xi \frac{1}{p(p^2+1)} - \left(\frac{2a}{3}\right)^3 \frac{p^2}{p^2+1} = 0 \quad \ldots\ldots \quad \text{V.}$$

V.) ist eine lineare Differentialgleichung. Die Lösung derselben lautet (vergl. Aufgabe 32):

$$\xi = \frac{C \cdot p}{\sqrt{1+p^2}} + \left(\frac{2a}{3}\right)^3 \cdot p.$$

Setzt man nun $C = 0$, so ist

$$\xi = \left(\frac{2a}{3}\right)^3 p$$

und aus IV.)

$$\eta = -\left(\frac{2a}{3}\right)^3 + \frac{1}{2}\left(\frac{2a}{3}\right)^3 p^2.$$

Eliminiert man p, so ergibt sich

$$\xi^2 = 2 \cdot \left(\frac{2a}{3}\right)^3 \left[\eta + \left(\frac{2a}{3}\right)^3\right].$$

Diese Gleichung stellt eine Parabel dar.

47. Aufgabe.

Die Lösungen der drei Differentialgleichungen lauten:

1. $x = A \sin \alpha t + B \cos \alpha t$
2. $y = A_1 \sin \alpha t + B_1 \cos \alpha t$
3. $z = \frac{b t^2}{2} + k_1 t + k_2.$

Ferner ist

$$4.\quad \frac{dx}{dt} = \alpha A \cos \alpha t - \alpha B \sin \alpha t$$

$$5.\quad \frac{dy}{dt} = \alpha A_1 \cos \alpha t - \alpha B \sin \alpha t$$

$$6.\quad \frac{dz}{dt} = bt + k_1.$$

Setzt man die gegebenen Werte für x, $\frac{dx}{dt}$ u. s. w. ein, so erhält man sechs Bedingungsgleichungen für die sechs Konstanten A, A_1 u. s. w. Es ergibt sich

$$A = c,\quad B = 0,\quad A_1 = 0,\quad B_1 = c,\quad k_1 = 0,\quad k_2 = 0.$$

Also ist

$$7.\quad x = c \sin \alpha t$$

$$8.\quad y = c \cos \alpha t$$

$$9.\quad z = \frac{b t^2}{2}.$$

Aus 7.) und 8.) ergibt sich durch Quadrieren und Addieren

$$10.\quad x^2 + y^2 = c^2,$$

d. h. die Kurve verläuft auf einem Kreiszylinder. (Figur 29.)

Die Projektionen in die xz- und yz-Ebene sind

$$11.\quad x = c \cdot \sin \alpha \sqrt{\frac{2z}{b}}$$

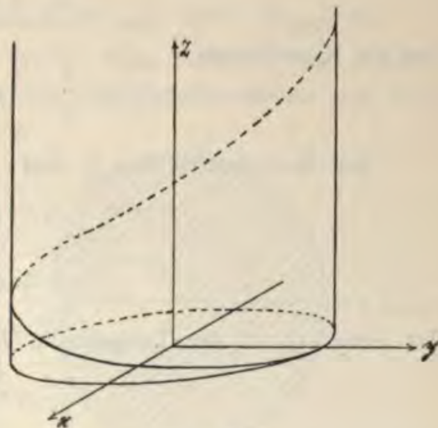
$$12.\quad y = c \cos \alpha \sqrt{\frac{2z}{b}}.$$

Die Kurve ist eine Schraubenlinie. Setzt man $\alpha = 1$, $c = 2$, $b = \frac{2}{\pi^2}$, so ist

$$13.\quad x = 2 \sin t$$

$$14.\quad y = 2 \cos t$$

$$15.\quad z = \frac{t^2}{\pi^2}.$$



Figur 29.

Die Kurve ist linksläufig und ihre Ganghöhe $z = 4$.

Die Gleichung einer Kugel vom Radius c und dem Mittelpunkt auf der Kurve 7.) bis 9.) lautet:

$$16.\qquad (x - c \sin \alpha t)^2 + (y - c \cos \alpha t)^2 + \left(z - \frac{b t^2}{2}\right) = c^2.$$

Ferner ist

$$V = c^2\pi\int_0^{\frac{1}{2}} dz = c^2\pi\cdot\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}c^2\pi\cdot 1\ [\text{cm}^3]$$

$$O = 2c\pi\int ds = 2c\pi\int_0^1\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt$$

$$= 2c\pi\cdot\int_0^1\sqrt{4+t^2}\,dt = 2c\pi\cdot\left[\frac{t}{2}\sqrt{4+t^2}+\lg t+\sqrt{4-t^2}\right]_0^1$$

$$= 4\pi\left[\frac{1}{2}\sqrt{5}+\lg\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right].$$

48. Aufgabe.

Die Gleichung des zu $0\,P_1$ konjugierten, also zur Tangente in P_1 parallelen Durchmessers lautet:

$$\frac{x\,x_1}{a^2}+\frac{y\,y_1}{b^2}=0.$$

Der Schnittpunkt P_2 mit der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$$

hat die Koordinaten

$$y_2 = \frac{b}{a}x_1 \quad \text{bezw.} \quad x_2 = -\frac{a}{b}y_1.$$

Die Koordinaten von Q sind:

$$x = x_1 - k\,x_2 = x_1 + \frac{k\,a}{b}y_1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 1.$$

$$y = y_1 + k\,y_2 = y_1 + \frac{k\cdot b}{a}x_1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 2.$$

Da ferner Q auf der Tangente in P_1 liegt, so gilt

$$\frac{x\,x_1}{a^2}+\frac{y\,y_1}{b^2}-1=0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 3.$$

Endlich ist

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}-1=0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 4.$$

Aus diesen vier Gleichungen ist x_1 und y_1 zu eliminieren:

$$(x-x_1)^2 = \left(\frac{k\,a}{b}y_1\right)^2 = k^2\,a^2\,\frac{y_1^2}{b^2}$$

$$(y-y_1)^2 = \left(\frac{k\,b}{a}x_1\right)^2 = k^2\,b^2\cdot\frac{x_1^2}{a^2}.$$

Durch Addition

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-2\left[\frac{x\,x_1}{a^2}+\frac{y\,y_1}{b^2}\right]+\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=k^2\left(\frac{y_1^2}{b^2}+\frac{x_1^2}{a^2}\right)$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-2+1=k^2$$

$$\frac{x^2}{a^2(1+k^2)}+\frac{y^2}{b^2(1+k^2)}-1=0.$$

Diese Gleichung stellt eine Schar ähnlicher Ellipsen dar.

49. Aufgabe.

1. Setzt man in

$$\rho=2a\cos\varphi\pm a \text{ für } \rho=0, \text{ so ist}$$
$$0=2\cos\varphi\pm 1$$
$$\cos\varphi=\pm\frac{1}{2};\quad \varphi_1=120^\circ,\ \varphi_2=60^\circ.$$

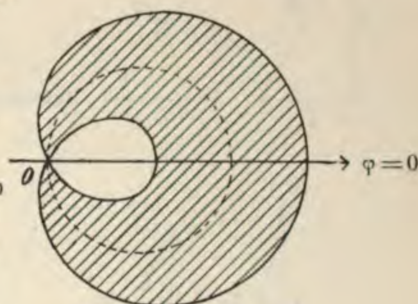
2. $$\operatorname{tg}\vartheta=\frac{\rho}{\rho'}=\frac{2a\cos\varphi\pm a}{-2a\sin\varphi}=\frac{2\cos\varphi\pm 1}{-2\sin\varphi}$$

$$\operatorname{tg}\vartheta_1\Big|_{\varphi=\frac{\pi}{3}}=\frac{-2\cdot\frac{1}{2}+1}{-2\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3}}=0;\quad \operatorname{tg}\vartheta_2\Big|_{\varphi=\frac{2\pi}{3}}=0,$$

d. h. die Tangenten haben die Richtungswinkel 60° und 120°. (Figur 30.)

3. Die Kurve entsteht auf folgende Weise: Vom Punkte 0 des Kreises $\rho=2a\cos\varphi$ sind Strahlen gezogen und von den Schnittpunkten mit dem Kreise aus $+a$ bezw. $-a$ aufgetragen. Die schraffierte Fläche ist deshalb

$$F=\int\rho^2\,d\varphi=2\int_0^{120}(2a\cos\varphi+a)^2\,d\varphi$$
$$-2\int_0^{60}(2a\cos\varphi-a)^2\,d\varphi$$
$$=2a^2\left[2(\cos\varphi\cdot\sin\varphi+\varphi)+4\sin\varphi+\varphi\right]_0^{120}$$
$$-2a^2\left[2(\cos\varphi\sin\varphi+\varphi)-4\sin\varphi+\varphi\right]_0^{60}$$
$$=2a^2\left[3\sqrt{3}+\pi\right][\text{cm}^2].$$



Figur 30.

50. Aufgabe.

Man hat aus den drei Gleichungen

1. $$y_1=a+b\,x_1+c\,x_1^2$$
2. $$\operatorname{tg}\varphi=b+2c\,x_1=\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_1}$$

3. $$r = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2 y}{d x^2}} = \frac{[1 + \operatorname{tg}^2 \varphi]^{\frac{3}{2}}}{2c}$$

die Größen a, b, c zu berechnen und in die Gleichung

$$y = a + bx + cx^2$$

einzusetzen. Das Resultat lautet, wenn zur Abkürzung $(1 + \operatorname{tg}^2 \varphi)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{\cos^3 \varphi} = K$ gesetzt wird,

$$y = y_1 - x_1 \operatorname{tg} \varphi + \frac{K x_1^2}{2r} + \left(\operatorname{tg} \varphi - \frac{K x_1}{r}\right) x + \frac{K}{2r} x^2.$$

51. Aufgabe.

Man berechnet zuerst den Flächeninhalt eines Querschnittes, z. B. F_2; dann ist

$$F_2 = \frac{5}{3} [t_{20} + 4\, t_{21} + 2\, t_{22} + 4\, t_{23} + t_{24}],$$

oder da nach Angabe $t_{20} = 0$ und $t_{24} = 0$ ist,

$$F_2 = \frac{5}{3} [4\, t_{21} + 2\, t_{22} + 4\, t_{23}] = \frac{10}{3} [2\, t_{21} + t_{22} + 2\, t_{23}].$$

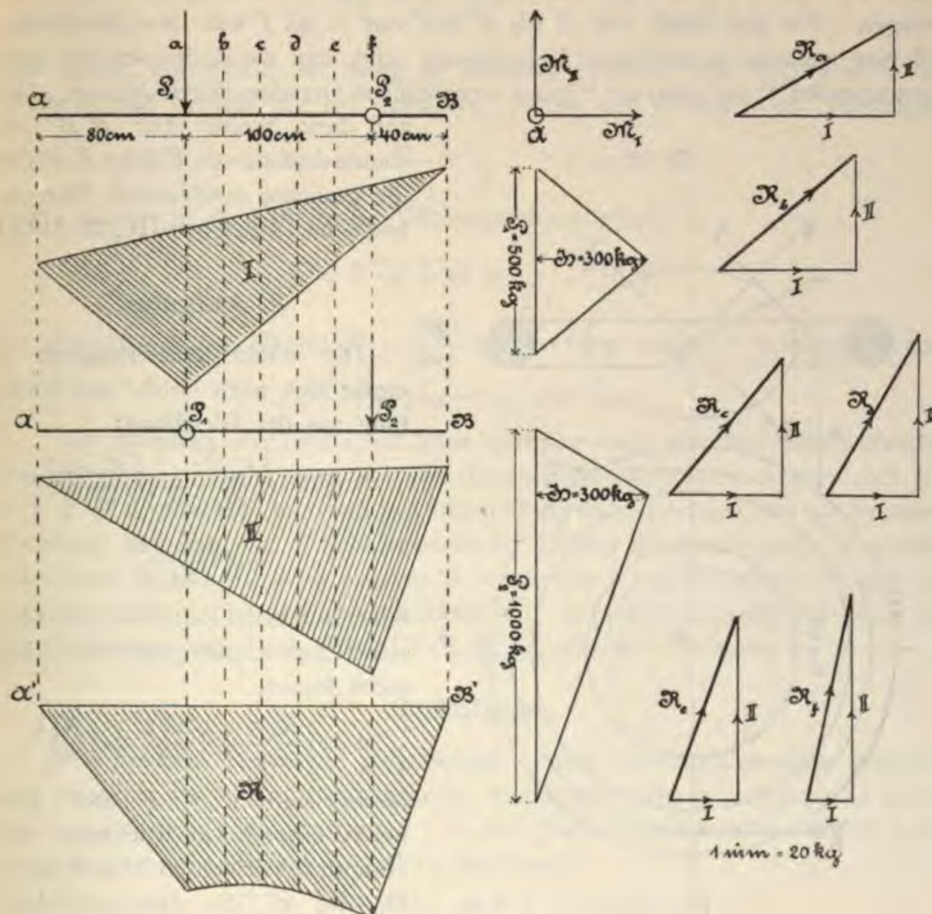
Hierauf berechnet man den Volumeninhalt auf die gleiche Weise

$$V = \frac{10}{3} [F_0 + 4\, F_1 + 2\, F_2 + 4\, F_3 + F_4].$$

II. Technische Mechanik.

1. Aufgabe.

Von den an dem Stab AB wirkenden Kräften liegt P_1 in der vertikalen, P_2 in der horizontalen Ebene durch die Stabachse. Um die Momentenfläche für das aus diesen beiden Lasten resultierende Biegungsmoment zu zeichnen, braucht man daher nur für jeden Querschnitt den Momentenvektor der einen



Figur 1.

und der anderen Lastebene zu ermitteln, beide graphisch zu summieren und die Länge des resultierenden Momentenvektors von einer beliebig gewählten Achse aus abzutragen.

In Figur 1 Seite 63 sind die Momentenflächen für die vertikale bezw. horizontale Lastebene mit I und II bezeichnet; der Horizontalzug in den zugehörigen Kräftedreiecken ist dabei, wie verlangt, zu $H = 300$ kg angenommen. Für jeden Stabquerschnitt zwischen A und B tritt der Momentenvektor M_{I} der vertikalen Lastebene senkrecht nach vorne aus der Zeichenebene heraus, während M_{II} in dieser auf AB senkrecht steht. Diese Richtungen sind im Seitenriß, von A her betrachtet, dargestellt. Da also M_{I} und M_{II} stets zueinander rechtwinkelig bleiben, so ist der resultierende Momentenvektor R jedesmal die Hypotenuse des aus M_{I} und M_{II} konstruierten rechtwinkeligen Dreiecks. Diese Konstruktion ist für die Querschnitte a, b, c, d, e und f ausgeführt und sodann $R_a \ldots R_f$ von $A' B'$ aus an den zugehörigen Querschnittsstellen lotrecht abgetragen. Für das Stück von A bis a und von B bis f war dies überflüssig, weil eine einfache geometrische Ueberlegung zeigt, daß die Endpunkte der dort anzutragenden R auf den aus Figur 1 ersichtlichen Geraden liegen müssen. Die auf diese Weise über $A' B'$ zustande kommende Fläche R bildet die gesuchte resultierende Momentenfläche. (Vgl. Föppl II., 22. Aufg.)

Figur 2.

2. Aufgabe.

Die Winkelgeschwindigkeit $\mathfrak{u}$ ergibt sich nach Größe und Richtung aus der Gleichung:

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{i}\frac{\int K_1\,dt}{\Theta_1} + \mathfrak{j}\frac{\int K_2\,dt}{\Theta_2} + \mathfrak{k}\frac{\int K_3\,dt}{\Theta_3},$$

oder, da $\mathfrak{K}$ in der Zeit $t = t_0 = {}^1/_2$ sec seine Lage relativ gegen den Ring nicht ändert,

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{i}\frac{K_1 t_0}{\Theta_1} + \mathfrak{j}\frac{K_2 t_0}{\Theta_2} + \mathfrak{k}\frac{K_3 t_0}{\Theta_3};$$

hierin sind $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ drei Einheits-Vektoren in Richtung der Hauptträgheitsachsen des Ringes, Θ_1, Θ_2, Θ_3 die dazu gehörigen Trägheitsmomente und K_1, K_2, K_3

die Komponenten von $\mathfrak{K}$ in diesen Richtungen. Bei der in Figur 2 Seite 64 getroffenen Anordnung der Einheitsvektoren $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ ist

$$\Theta_1 = Mr^2; \quad \Theta_2 = \Theta_3 = \frac{1}{2}\,\Theta_1 = \frac{1}{2}\,Mr^2;$$

$$K_1 = 2\,Pr\cos\frac{\pi}{4}; \quad K_2 = 2\,Pr\cos\frac{\pi}{2}; \quad K_3 = -\,2\,Pr\cos\frac{\pi}{4};$$
$$= Pr\sqrt{2}; \qquad = 0; \qquad = -\,Pr\sqrt{2}.$$

Man erhält daher für $\mathfrak{u}$ folgende Gleichung:

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{i}\,\frac{P\sqrt{2}}{Mr}\,t_0 + \mathfrak{j}\cdot 0 - \mathfrak{k}\,\frac{2\,P\sqrt{2}}{Mr}\,t_0.$$

Die Winkelgeschwindigkeitskomponenten in Richtung der drei Hauptträgheitsachsen sind demnach:

$$u_1 = \frac{P\sqrt{2}}{Mr}\,t_0; \quad u_2 = 0; \quad u_3 = -\,\frac{2\,P\sqrt{2}}{Mr}\,t_0.$$

Die Achse, um welche der Ring in Drehung versetzt wird, liegt also in der $\mathfrak{i}\,\mathfrak{k}$-Ebene und schließt mit der negativen $\mathfrak{k}$-Achse den Winkel φ ein, für den aus

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{u_1}{-\,u_3} = \frac{1}{2} \qquad \varphi = 26^0\,30'$$

folgt. Dabei ist die Größe der Winkelgeschwindigkeit

$$u = \sqrt{u_1^2 + u_3^2} = \frac{P}{Mr}\sqrt{10}\,t_0;$$

für $P = 20$ kg, $r = 60$ cm, $M = \frac{300}{981}$ kg cm^{-1} sec^2 und $t_0 = {}^1/_2$ sec erhält man:

$$u = 1{,}722\ \text{sec}^{-1} = 100^0\ \text{sec}^{-1}.$$

Die Richtung der Drehachse kann übrigens auch graphisch leicht ermittelt werden. Man braucht dazu nur das Zentralellipsoid, dessen Achsen sich wie $1 : \sqrt{2} : \sqrt{2}$ verhalten, in einem beliebigen Maßstab zu zeichnen und die bekannte Richtung des hier mit $\mathfrak{K}$ gleichgerichteten Dralles $\mathfrak{B}$ einzutragen; konstruiert man dann an das Ellipsoid eine zu $\mathfrak{B}$ senkrechte Tangentialebene, so gibt die Verbindungslinie des Berührungspunktes mit dem Schwerpunkt die Richtung der Drehachse an. (Vgl. Föppl IV., §§ 18, 19, 22.)

3. Aufgabe.

Da bei dem gegebenen Belastungsfall keine Normalspannungen zwischen den einzelnen Fasern auftreten, sondern nur Spannungen σ senkrecht zu jedem Querschnitt und Schubspannungen τ in der Querschnittsfläche, so ist die reduzierte Spannung nach der Formel zu berechnen:

$$\sigma_{red} = \frac{m-1}{2\,m}\,\sigma \pm \frac{m+1}{2\,m}\sqrt{4\,\tau^2 + \sigma^2}.$$

Die Kraft $P = 40$ kg bringt im gefährlichen Querschnitt, d. i. die Einspannstelle, ein Biegungsmoment von der Größe 40 kg · 120 cm $=$ 4800 kg cm hervor, während das Torsionsmoment 40 kg · 50 cm $=$ 2000 kg cm beträgt. Das Widerstandsmoment des kreisförmigen Querschnittes ist $\frac{3^3 \pi}{4}$ cm³, sein polares Trägheitsmoment $\frac{3^3 \pi}{2}$ cm³, so daß man für die Biegungs- bezw. Torsionsspannung am Umfang des gefährlichen Querschnittes die Werte erhält:

$$\sigma = \frac{4800 \cdot 4}{3^3 \pi} \text{ kg cm}^2 = 227 \text{ atm}$$

und

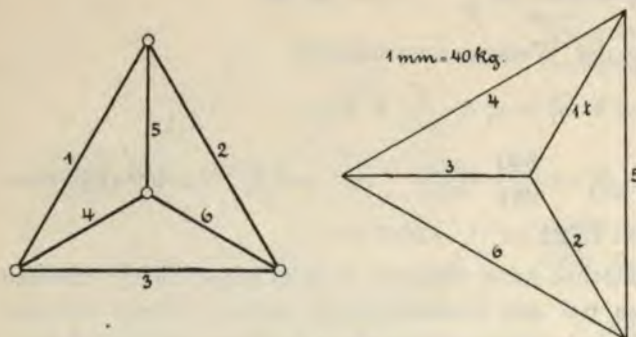
$$\tau = \frac{2000 \cdot 2}{3^3 \pi} \text{ kg cm}^2 = 47 \text{ atm}.$$

Nimmt man $m = 3^1/_3$ an, so wird also:

$$\sigma_{red} = \frac{7}{20} \cdot 227 \pm \frac{13}{20} \sqrt{8820 + 51\,500} \text{ atm} = \pm 275 \text{ atm},$$

wobei das positive Zeichen für die Zugseite, das negative für die Druckseite der Welle zu nehmen ist. (Vgl. Föppl III., §§ 14, 57, und 44. Aufgabe.)

4. Aufgabe.



Figur 3.

Man betrachtet den Stab 1 als den überzähligen Stab in dem einfach statisch unbestimmten Fachwerk und zeichnet den Kräfteplan u, der die Spannungen in den Stäben des Hauptnetzes angibt, wenn man den überzähligen Stab durch eine Zugspannung von der Größe der Lasteinheit ersetzt. (Figur 3.) Ist l_i die Länge des Stabes i, F der Querschnitt, E der Elastizitätsmodul, η der Ausdehnungskoeffizient und t die Temperaturerhöhung, so ist die Spannung im überzähligen Stabe 1

$$X = -\frac{\eta\, l_1\, t}{\Sigma\, u^2\, r};$$

$r = \frac{l_i}{E\,F}$ und die Verhältniszahlen u werden dem Kräfteplan entnommen. Die Spannung im Stabe i ist dann

$$S_i = -\,u_i \frac{\eta\, l_1\, t}{\Sigma\, u^2\, r}.$$

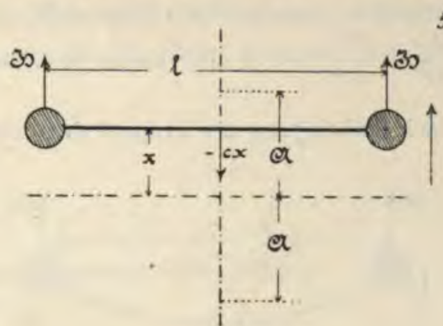
Die numerische Berechnung ist aus nachstehender Tabelle ersichtlich.

Stab-Nr.	Stablänge in cm	$r = \frac{l}{EF}$ in cm/kg	Verhältnis-zahl u	$u^2 r$	S_i in t
1	100	10^{-6}	$+1$	10^{-6}	$-6{,}1$
2	100	10^{-6}	-1	10^{-6}	$+6{,}1$
3	100	10^{-6}	-1	10^{-6}	$+6{,}1$
4	$\frac{1}{3}\cdot 100\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}\cdot 10^{-6}$	$+\sqrt{3}$	$\sqrt{3}\cdot 10^{-6}$	$-10{,}56$
5	$\frac{1}{3}\cdot 100\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}\cdot 10^{-6}$	$+\sqrt{3}$	$\sqrt{3}\cdot 10^{-6}$	$-10{,}56$
6	$\frac{1}{3}\cdot 100\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}\cdot 10^{-6}$	$+\sqrt{3}$	$\sqrt{3}\cdot 10^{-6}$	$-10{,}56$
			Summe:	$3\cdot(1+\sqrt{3})\cdot 10^{-6} = 8{,}18\cdot 10^{-6}$	

(Vgl. Föppl II., § 51.)

5. Aufgabe.

Die an jedem Gewicht anzubringende Trägheitskraft ist $H = -m\frac{d^2x}{dt^2}$, wenn die Masse des Gewichtes mit m und die Entfernung von der Gleichgewichtslage mit x bezeichnet wird. Bei wachsendem x ist $\frac{dx}{dt}$ positiv, sein Absolutwert aber nimmt ab; bei abnehmendem x wird $\frac{dx}{dt}$ negativ, der Absolutbetrag der Geschwindigkeit aber wächst. Die Beschleunigung $\frac{d^2x}{dt^2}$ ist daher auf der Seite der positiven x parallel der negativen x-Achse, und die Trägheitskräfte H sind infolgedessen entgegengesetzt gerichtet. Die an der Stange wirksame äußere Kraft, welche die harmonische Schwingung aufrecht erhalten soll, ist $-2cx$, worin der Faktor 2 zur Vereinfachung der folgenden Gleichungen eingeführt ist. (Figur 4.)



Figur 4.

Nach dem d'Alembertschen Prinzip erhält man

$$-2m\frac{d^2x}{dt^2} - 2cx = 0,$$

oder

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -cx;$$

die Lösung dieser Gleichung ist

$$x = A \sin \alpha t,$$

wo $\alpha = \sqrt{\frac{c}{m}}$ ist und A die Amplitude der Schwingung bedeutet. Die Dauer einer vollen Schwingung wird

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}}$$

und daher die Schwingungszahl pro Zeiteinheit

$$n = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{c}{m}}.$$

Hieraus ergibt sich für c der Wert

$$c = 4\, m\, n^2\, \pi^2.$$

Die durch die Trägheitskräfte hervorgerufene Biegungsbeanspruchung ist umso größer, je größer der Absolutwert von H wird, und erreicht ihren Maximalwert, wenn $x = A$, also $H = -cA = -4\,m\,n^2\,\pi^2 A$ wird. Für den gefährlichen Querschnitt in der Stangenmitte ist

$$\sigma_{max} = \frac{H\frac{l}{2}}{W} = (-)\frac{2\,l\,m\,n^2\,\pi^2 A}{W},$$

oder da das Widerstandsmoment für den kreisförmigen Querschnitt $W = \frac{r^3\pi}{4}$ ist,

$$\sigma_{max} = \frac{8\,l\,Q\,n^2\,\pi\,A}{r^3\,g}.$$

Bei gegebenem σ_{max} ist also die größte zulässige Schwingungszahl:

$$n_{max} = \sqrt{\frac{r^3\,\sigma_{max}\,g}{8\,l\,Q\,\pi\,A}};$$

nach Einsetzen der gegebenen Werte findet man:

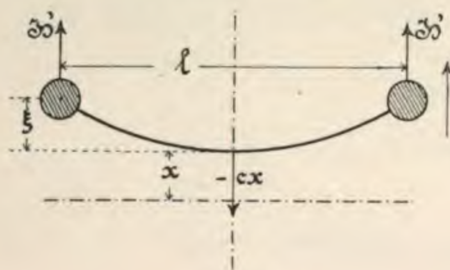
$$n_{max} = \sqrt{\frac{8\ \text{cm}^3 \cdot 1000\ \text{kg/cm}^2 \cdot 9{,}81\ \text{m/sec}^2}{8 \cdot 1\ \text{m} \cdot 100\ \text{kg} \cdot \pi \cdot 30\ \text{cm}}} = \sim 1\ \text{sec}^{-1} = 60\ \text{min}^{-1}.$$

Infolge der elastischen Verbiegung der Stange ist der von den beiden Gewichten zurückgelegte Weg nicht x, sondern $x + \xi$, also ihre Beschleunigung $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{d^2\xi}{dt^2}$; die ξ sind hiebei in derselben Richtung positiv gezählt, wie die x. Nach Anbringung der Trägheitskräfte $H' = -m\left(\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{d^2\xi}{dt^2}\right)$ besteht zwischen dem Biegungspfeil ξ und der Kraft H' die Beziehung

$$\xi = \frac{H'}{E\Theta} \cdot \frac{l^3}{24},$$

so daß sich für die von den Gewichten ausgeführten Schwingungen folgende Gleichung ergibt:

$$-m\left(\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{d^2\xi}{dt^2}\right) = \frac{24\,E\Theta}{l^3}\,\xi,$$



Figur 5.

oder da
$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-cA\sin\alpha t,$$
$$m\frac{d^2\xi}{dt^2}+\frac{24E\Theta}{l^3}\cdot\xi=cA\sin\alpha t.$$
Die Lösung dieser Differentialgleichung ist unter der Voraussetzung, daß zurzeit $t=0$ sowohl ξ als $\frac{d\xi}{dt}$ gleich Null waren:
$$\xi=\frac{cA}{m(\eta^2-\alpha^2)}\left\{\sin\alpha t-\frac{\alpha}{\eta}\sin\eta t\right\},$$
wobei $\eta=\sqrt{\frac{24E\Theta}{ml^3}}$ gesetzt wurde. Resonanz tritt ein, wenn η gleich oder wenig verschieden von α ist; bezeichnet man die zugehörige Schwingungszahl des bewegten Maschinenteiles $\frac{\alpha}{2\pi}$ wieder mit n, so muß
$$n=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{24E\Theta g}{Ql^3}}$$
werden, was nach Einführung der gegebenen Werte
$$n=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{24\cdot 2\cdot 10^6\,\text{kg/cm}^2\cdot 4\,\text{cm}^4\cdot\pi\cdot 981\,\text{cm/sec}^2}{100\,\text{kg}\cdot 10^6\,\text{cm}^3}}=735\,\text{min}^{-1}$$
ergibt. (Vgl. Föppl III, §§ 18, 27; IV., §§ 4 und 6.)

6. Aufgabe.

Die Aufgabe ist einfach statisch unbestimmt. Bezeichnet man die in der Versteifungsstange herrschende Zugspannung mit X, ihre vertikale Komponente mit Z, so ist $X=Z\sqrt{2}$. Um Z zu bestimmen, kann man drei verschiedene Wege einschlagen.

Erste Lösung mittels des Satzes vom Minimum der Formänderungsarbeit. — Das Biegungsmoment in einem Querschnitt des links von der Zugstange gelegenen Balkenteiles ist
$$M_1=-Px;$$
in dem rechts befindlichen Teile wird
$$M_2=-Px+Z\left(x-\frac{l}{3}\right).$$
Wir berechnen jetzt für jeden der beiden Abschnitte das Integral
$$\int M^2\,dx.$$
Links erhält man
$$\int_0^{\frac{l}{3}}P^2x^2\,dx=\frac{P^2l^3}{81};$$
rechts wird

$$\int_{\frac{l}{3}}^{l}\left[-Px+Z\left(x-\frac{l}{3}\right)\right]^2 dx=\frac{l^3}{81}(8\,Z^2-28\,PZ+26\,P^2).$$

Die gesamte Formänderungsarbeit ist daher:

$$A=\frac{1}{2\,E\Theta}\cdot\frac{l^3}{81}(8\,Z^2-28\,PZ+27\,P^2).$$

Nach dem Satze von **Castigliano** muß nun $\frac{\partial A}{\partial Z}=0$ werden, dies ergibt

$$8\,Z-14\,P=0,$$

so daß

$$Z=\frac{7}{4}P$$

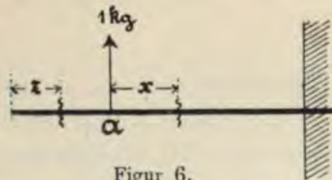
und

$$X=\frac{7}{4}P\sqrt{2}$$

wird.

Zweite Lösung mittels des Satzes von **Maxwell** über die Gegenseitigkeit der Verschiebungen. (Figur 6.) — Man denke sich die Zugstange entfernt und bringe an der Stelle A eine nach oben gerichtete Kraft von der Größe 1 kg an. Sodann bestimme man durch Zeichnung oder Rechnung die zu den beiden Balkenteilen gehörigen Aeste der elastischen Linie. Da das Biegungsmoment für einen Querschnitt des linken Teiles gleich Null, rechts hingegen gleich 1 kg$\cdot x$ ist, so erhält man

$$E\Theta\frac{d^2y}{dz^2}=0 \quad \text{bezw.} \quad E\Theta\frac{d^2y}{dx^2}=-x$$



Figur 6.

und durch Integration:

$$E\Theta\frac{dy}{dz}=A_1;\quad E\Theta\frac{dy}{dx}=-\frac{x^2}{2}+B_1$$

$$E\Theta y=A_1 z+A_2;\ E\Theta y=-\frac{x^3}{6}+B_1 x+B_2.$$

Die Konstanten A und B bestimmen sich aus der Bedingung, daß an der Stelle A, also für $x=\frac{2}{3}l$ und $x=0$, y und sein erster Differentialquotient für beide Aeste der elastischen Linie den nämlichen Wert ergeben müssen und daß außerdem für den rechten Ast an der Stelle $x=\frac{2}{3}l$ y und $\frac{dy}{dx}$ verschwinden müssen. Man erhält also:

$$A_1=B_1$$

$$A_1\frac{l}{3}+A_2=B_2$$

$$0=-\frac{4}{81}l^3+\frac{2}{3}l\,B_1+B_2$$

$$0=-\frac{2}{9}l^2+B_1.$$

Durch Auflösen der Gleichungen findet man:

$$A_1 = B_1 = \frac{2}{9} l^2; \quad A_2 = -\frac{14}{81} l^3; \quad B_2 = -\frac{8}{81} l^3.$$

Die Gleichungen für die beiden Aeste der elastischen Linie lauten nunmehr:

$$E\Theta y = \frac{2}{9} l^2 z - \frac{14}{81} l^3 \text{ und } E\Theta y = -\frac{x^3}{6} + \frac{2}{9} l^2 x - \frac{8}{81} l^3.$$

Die Durchbiegung, welche die Lasteinheit im Querschnitt $z = 0$ hervorruft, ist also

$$-\frac{14}{81} \frac{l^3}{E\Theta}.$$

Ebenso groß wäre aber auch die Durchbiegung der Stelle A, wenn an der Stelle $z = 0$ die Lasteinheit angebracht würde, d. h. man kennt die Einflußzahlen

$$\alpha_{0A} = \alpha_{A0} = -\frac{14}{81} \frac{l^3}{E\Theta}.$$

Andererseits kennt man aber auch die Durchbiegung, welche die in A angreifende Kraft 1 kg an der Stelle A selbst hervorbringt; man erhält nämlich für $x = 0$ oder $z = \frac{l}{3}$

$$y = \alpha_{AA} = -\frac{8}{81} \frac{l^3}{E\Theta}.$$

Die durch die Kraft P im Querschnitt A hervorgerufene Durchbiegung ist daher

$$P\alpha_{A0} = -P \cdot \frac{14}{81} \frac{l^3}{E\Theta},$$

während die durch die unbekannte Kraft Z an der gleichen Stelle bewirkte Einsenkung durch

$$Z\alpha_{AA} = -Z \cdot \frac{8}{81} \frac{l^3}{E\Theta}$$

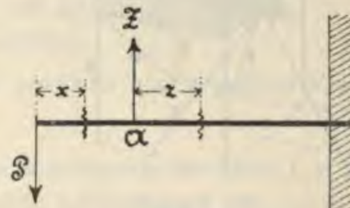
angegeben wird. Da durch das Zusammenwirken der beiden Kräfte P und Z der Punkt A seine Lage überhaupt nicht ändern soll, so muß

$$Z \cdot \frac{8}{81} \cdot \frac{l^3}{E\Theta} = P \cdot \frac{14}{81} \cdot \frac{l^3}{E\Theta}$$

sein, woraus man für Z wieder den Wert erhält:

$$Z = \frac{7}{4} P.$$

Dritte Lösung. — Die Kraft Z kann auch dadurch bestimmt werden, daß man für das Kräftesystem PZ die elastische Linie des linken und rechten Balkenteiles aufstellt und die dabei auftretenden vier willkürlichen Konstanten wie in der vorigen Lösung so bestimmt, daß im Einspannquerschnitt y verschwindet und die



Figur 7.

Tangente horizontal wird und daß an der Stelle A beide Aeste die nämliche Ordinate und Tangente besitzen. (Figur 7.) Nimmt man hiezu noch die weitere Bedingung, daß in A auch $y = 0$ sein soll, so erhält man damit eine neue Gleichung, aus der sich Z bestimmen läßt. Die Durchführung der Rechnung gestaltet sich, wie folgt:

Im linken Balkenteile ist $M = -Px$, also

$$E\Theta \frac{d^2 y}{d x^2} = Px$$

$$E\Theta \frac{dy}{dx} = P\frac{x^2}{2} + A_1$$

$$E\Theta y = P\frac{x^3}{6} + A_1 x + A_2.$$

Rechts erhält man für M den Wert $M = -P\left(z + \frac{l}{3}\right) + Zz$. Für die elastische Linie gilt daher:

$$E\Theta \frac{d^2 y}{d z^2} = z(Z - P) - P\frac{l}{3}$$

$$E\Theta \frac{dy}{dz} = \frac{z^2}{2}(Z - P) - P\frac{l}{3}z + B_1$$

$$E\Theta y = \frac{z^3}{6}(Z - P) - P\frac{l}{6}z^2 + B_1 z + B_2.$$

Da y für $z = 0$ verschwinden soll, so wird $B_2 = 0$, und da an der Einspannstelle $y = \frac{dy}{dz} = 0$ ist, so gelten die Gleichungen:

$$0 = \frac{4l^3}{81}(Z - P) - \frac{2l^3}{27}P + \frac{2}{3}lB_1;$$

$$0 = \frac{2l^2}{9}(Z - P) - \frac{2l^2}{9}P + B_1.$$

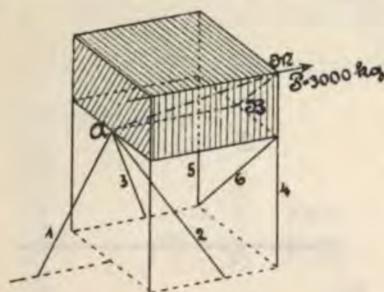
Durch Elimination von B_1 findet man:

$$\frac{8}{81}l^3(Z - P) - \frac{2}{27}l^3 P = 0$$

und hieraus

$$Z = \frac{7}{4}P.$$

(Vgl. Föppl III., §§ 27, 29, 33, 35, u. Aufg. 21.)

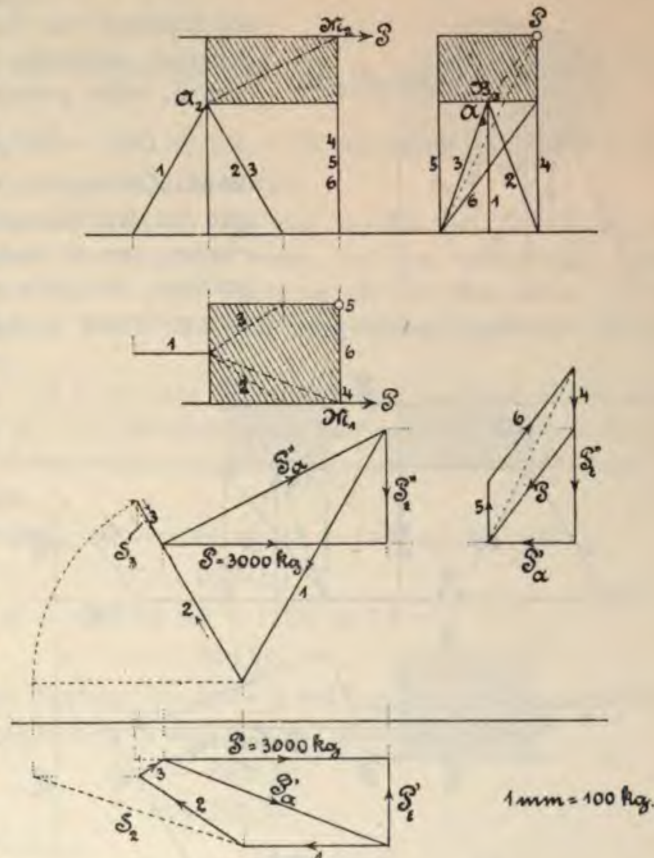


Figur 8.

7. Aufgabe.

Erste Lösung. (Figur 8 und 9.) — Da die Stäbe 1, 2, 3 sich im Punkte A schneiden und 4, 5, 6 in einer Ebene ε liegen, so ist es am einfachsten, die Kraft P in zwei Komponenten

P_A und P_ε zu zerlegen, deren erste durch den Punkt A geht und deren andere in der Ebene ε gelegen ist. Dann müssen die Spannungen S_1, S_2, S_3 der Kraft P_A und S_4, S_5, S_6 der Komponente P_ε das Gleichgewicht halten. Die Richtungen dieser Kräfte P_A und P_ε sind, wie aus der axonometrischen Figur ohne weiteres klar wird, die Verbindungslinien der Punkte A, M und B, M, wenn M der Durchschnittpunkt der Kraft P mit der Ebene ε ist und AB parallel P gezogen wird. Nachdem P_A und P_ε in Grund- und Aufriß bestimmt sind, zerlegt man zunächst P_A nach den Richtungen 1, 2, 3 und erhält hiedurch die Spannungen S_1, S_2, S_3. Die übrigen Stab-Spannungen findet man, indem man im Seitenriß P_ε nach den Richtungen 4, 5, 6 zerlegt. Um Platz zu sparen, ist dabei für die Kräftepläne der Maßstab 1 mm = 100 kg statt des verlangten 1 mm = 50 kg gewählt. Die Größe der Spannungen S_1, S_4, S_5 und S_6 kann aus dem Kräfteplan unmittelbar entnommen werden, S_2 und S_3 sind in bekannter Weise aus Grundriß und Aufriß zu bestimmen. Man findet:



Figur 9.

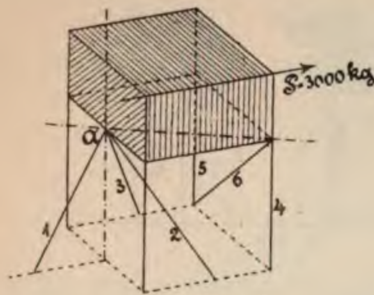
$$S_1 = +3840 \text{ kg}; \; S_2 = -2930 \text{ kg}; \; S_3 = +700 \text{ kg}; \; S_4 = +790 \text{ kg};$$
$$S_5 = -790 \text{ kg}; \; S_6 = -1870 \text{ kg}.$$

Dabei sind Zug- und Druckspannungen durch die positiven und negativen Vorzeichen unterschieden.

Zweite Lösung. (Fig. 10 u. 11.) — Die durch den Schnittpunkt der Stäbe 1, 2, 3 gehende Vertikale schneidet die Stäbe 1, 2, 3, 4 und 5; infolgedessen läßt sich die Grundrißkomponente der Stabspannung S_6 durch Anschreiben einer Momenten-

gleichung für diese Achse bestimmen. Wir projizieren also das ganze Kräftesystem in den Grundriß und bilden dort die Momente für den Punkt A_1 als Momentenpunkt. Bezeichnet man die Grundrißprojektion von S_6 mit S'_6, so wird:

$$S'_6 \cdot 17{,}5 = 3000 \text{ kg} \cdot 6{,}5, \text{ also } S'_6 = 1130 \text{ kg};$$

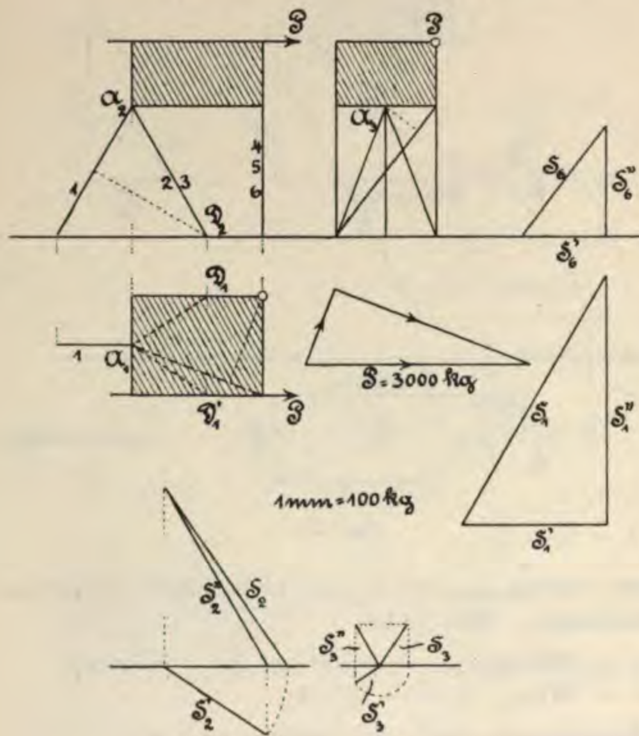


Figur 10.

die Richtung des Stabes 6 kann aus dem Seitenriß unmittelbar entnommen und daher auch S_6 selbst gefunden werden:

$$S_6 = 1870 \text{ kg};$$

die am Knotenpunkt angreifende Kraft ist, wie man bei Aufstellung der Momentengleichung erkennt, von der Stabmitte gegen Punkt (4, 6) gerichtet, der Stab sucht sich demnach zu verlängern und ist daher gedrückt.



Figur 11.

Eine zweite Achse, welche fünf Stäbe schneidet, erhält man in der Verbindungs-Linie des Schnittpunktes d. Stäbe 1, 2, 3 mit dem der Stäbe 4 u. 6. Projiziert man alle Kräfte auf eine zu dieser Achse senkrechte Ebene u. schreibt die Momentengleichung in bezug auf den Durchschnitt der Achse mit dieser Ebene als Momentenpunkt an, so erhält man die Spannung des Stabes 5, die sich in diese Ebene in wahrer Größe projiziert. Man findet, indem man die entsprechenden Hebelarme und Kraft-Komponenten der Zeichnung entnimmt:

$$1090 \text{ kg} \cdot 8{,}7 = S_5 \cdot 12 \text{ oder } S_5 = 790 \text{ kg}.$$

Stab 5 ist gedrückt.

Nachdem die Spannungen S_5 und S_6 bekannt sind, braucht man nur im Seitenriß für den Punkt A_3 als Momentenpunkt eine Momentengleichung anzuschreiben, um die Stabspannung S_4 zu erhalten:

$$790 \text{ kg} \cdot 6{,}5 - 1870 \text{ kg} \cdot 5{,}5 + S_4 \cdot 6{,}5 = 0,$$

woraus die Zugspannung

$$S_4 = 790 \text{ kg}$$

folgt. Nunmehr ergibt die Momentengleichung für D_2 im Aufriß auch die Stabspannung S_1

$$-S_1 \cdot 17{,}5 + 3000 \text{ kg} \cdot 26 - 1490 \text{ kg} \cdot 7{,}3 - 790 \text{ kg} \cdot 7{,}3 + 790 \text{ kg} \cdot 7{,}3 = 0,$$

$$S_1 = 3840 \text{ kg}.$$

Stab 1 ist, wie ohnehin zu erwarten war und deshalb bei Aufstellung der Momentengleichung bereits berücksichtigt wurde, auf Zug beansprucht; hiebei ist natürlich zu beachten, daß in jener Gleichung die von den Stäben auf die Knotenpunkte übertragenen Kräfte das entgegengesetzte Vorzeichen wie die Stabspannungen besitzen.

Durch Zerlegung von S_1 in eine horizontale und vertikale Komponente ergibt sich $S'_1 = 1920$ kg. Im Grundriß lassen sich dann für D_1 bezw. D'_1 als Momentenpunkt zwei Momentengleichungen anschreiben, aus denen S'_2 und S'_3 gefunden werden können:

$$S'_2 \cdot 11 + 1920 \text{ kg} \cdot 6{,}5 - 3000 \text{ kg} \cdot 13 + 1130 \text{ kg} \cdot 7{,}5 = 0$$

$$S'_2 = 1640 \text{ kg}$$

$$S'_3 \cdot 11 - 1920 \text{ kg} \cdot 6{,}5 + 1130 \text{ kg} \cdot 7{,}5 = 0$$

$$S'_3 = 370 \text{ kg}.$$

Ermittelt man jetzt die Neigung der Stäbe 2 und 3 gegen die Grundrißebene, so können auch die Spannungen S_2 und S_3 selbst gefunden werden:

$$S_2 = -2930 \text{ kg}$$

$$S_3 = +700 \text{ kg}.$$

(Vgl. Föppl II., 3. Abschnitt.)

8. Aufgabe.

Bezeichnet man die Pfeilhöhe des Bogenträgers mit f, seine Spannweite mit l, so lautet die Gleichung der parabolischen Mittellinie, bezogen auf das linke Auflager als Koordinatenanfangspunkt

$$z = \frac{4f}{l^2}(lx - x^2);$$

der Horizontalschub für den Fall A) der Aufgabe ergibt sich dann nach der Formel

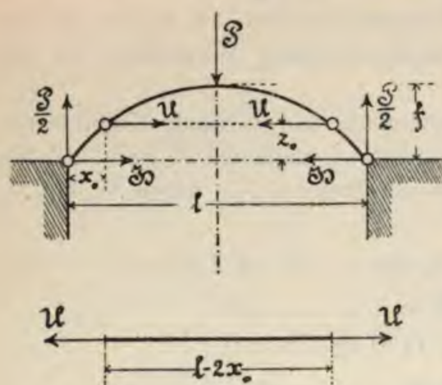
$$H = \frac{\int M_b \, z \, ds}{\int z^2 \, ds}.$$

Hierin ist M_b das Biegungsmoment eines unter der nämlichen Belastung stehenden Balkenträgers, also $M_b = \frac{P}{2} x$; ersetzt man das Bogenelement ds durch dx, so wird

$$\int_0^l M_b z \, ds = 2 \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{P}{2} x \cdot \frac{4f}{l^2} (lx - x^2) \, dx = \frac{5}{48} P f l^2$$

$$\int_0^l z^2 \, ds = \int_0^l \frac{16 f^2}{l^4} (l^2 x^2 - 2 l x^3 + x^4) \, dx = \frac{8}{15} f^2 l.$$

Somit ist $H = \frac{25}{128} P \cdot \frac{l}{f}$ oder nach Einführung der gegebenen Zahlenwerte $H = 1560$ kg. Um den Horizontalschub im Falle B) zu ermitteln, zerlegen wir den Träger in zwei Teile, in den eben behandelten elastischen Bogenträger und in die Verstärkungsstange; aus der Summe der Formänderungsarbeiten dieser Teile erhält man sodann H durch Anwendung des Satzes von Castigliano. Hiebei sind die zwischen den beiden Teilen übertragenen inneren Kräfte an jedem Teile als äußere Kräfte U anzubringen, so daß in den Ausdruck für die Formänderungsarbeit A zwei statisch unbestimmte Größen, H und U, eingehen. (Figur 12.)



Figur 12.

Die Formänderungsarbeit A_1 des Bogenträgers wird:

$$A_1 = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2 \, ds}{E \Theta} = \frac{1}{2} \int_0^{x_0} \frac{M_I^2 \, ds}{E \Theta} + \int_{x_0}^{\frac{l}{2}} \frac{M_{II}^2 \, ds}{E \Theta},$$

wobei $M_I = \frac{P}{2} x - Hz$ und $M_{II} = \frac{P}{2} x - Hz - U(z - z_0)$ zu setzen ist.

Die spezifische Formänderungsarbeit der auf Zug beanspruchten Verstärkungsstange ist:

$$\mathsf{A} = \frac{\sigma^2}{2E} = \frac{U^2}{2EF^2},$$

also ihre gesamte Formänderungsarbeit:

$$A_2 = \int_0^{l - 2x_0} \frac{U^2}{2EF^2} F \, dx = \frac{U^2}{2EF} (l - 2x_0).$$

Die Formänderungsarbeit des verstärkten Bogenträgers wird daher:

$$A = A_1 + A_2 = \int_0^{x_0} \frac{\left(\frac{P}{2} x - H z\right)^2}{E \Theta} dx + \int_{x_0}^{\frac{l}{2}} \frac{\left[\frac{P}{2} x - H z - U (z - z_0)\right]^2}{E \Theta} dx$$

$$+ \frac{U^2}{2 E F} (l - 2 x_0).$$

Und nun ergeben sich die statisch unbestimmten Größen nach dem Satze von Castigliano aus den beiden Gleichungen:

$$\frac{\partial A}{\partial H} = 0; \quad \frac{\partial A}{\partial U} = 0$$

oder:

$$\int_0^{\frac{l}{2}} \left(\frac{P}{2} x - H z\right) z \, dx - \int_{x_0}^{\frac{l}{2}} U (z - z_0) \, z \, dx = 0;$$

$$- \frac{2}{E \Theta} \int_{x_0}^{\frac{l}{2}} \left[\frac{P}{2} x - H z - U (z - z_0)\right] (z - z_0) \, dx + \frac{U}{E F} (l - 2 x_0) = 0.$$

z_0 und x_0 sind hiebei gleich 0,5 m bezw. $2 - \sqrt{2} = 0,6$ m. Nach Auswertung der Integrale hat man zwei lineare Gleichungen für H und U, deren Auflösung den gesuchten Horizontalschub ergibt.

(Vgl. Föppl III., §§ 32, 33, 37 und Aufgabe 27.)

9. Aufgabe.

1. Die Stabspannungen ergeben sich durch Zeichnen eines Kräfteplanes;*) die zu den einzelnen Stäben gehörigen Spannungswerte sind in der umstehenden Tabelle eingetragen.

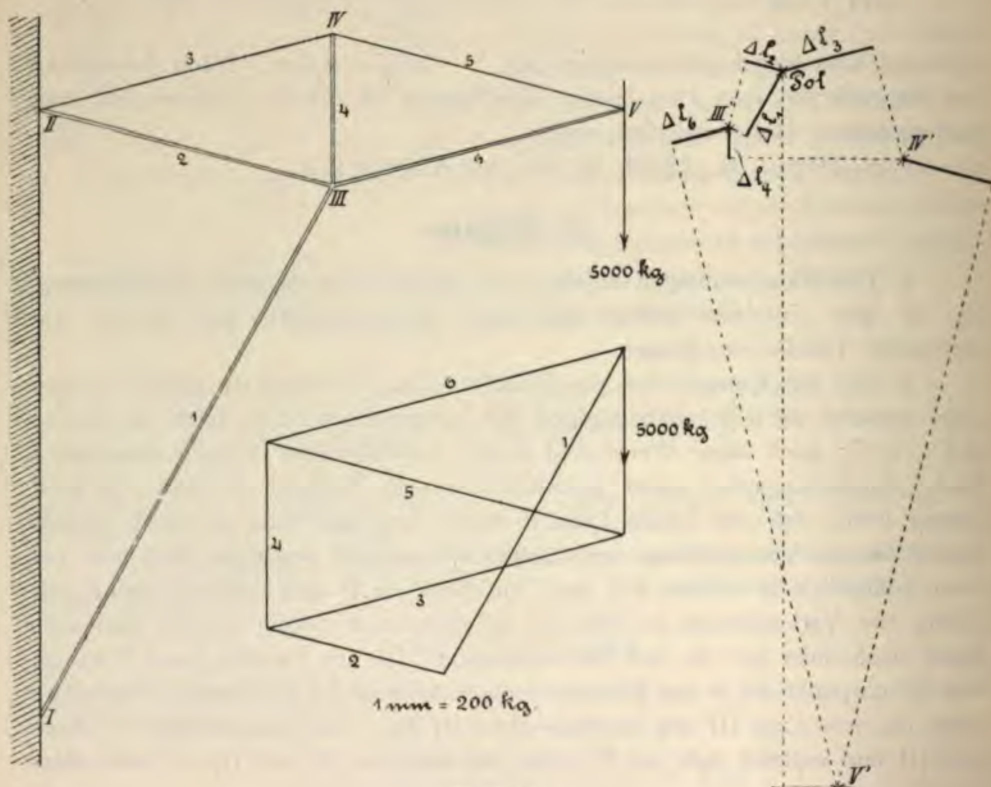
2. Für die Konstruktion des Williotschen Verschiebungsplanes ermittelt man zunächst die Längenänderungen Δl der einzelnen Stäbe nach der Formel $\Delta l_i = r_i S_i$; auch diese Werte sind in der nachfolgenden Tabelle eingetragen. Der Verschiebungsplan selbst gestaltet sich sehr einfach, da man von vornherein weiß, daß die Punkte I und II keine Lagenänderung erfahren können. Somit ist die Verschiebung des Punktes III dadurch bestimmt, daß man von dem willkürlich gewählten Pol aus, mit dem die Punkte I' und II' zusammenfallen, die Verkürzungen Δl_1 und Δl_2 in zehnfacher Größe abträgt und zwar beide nach links hin, da sich der Knotenpunkt III den Punkten I und II nähert. Der Schnittpunkt der in den Endpunkten von Δl_1 und Δl_2 errichteten Senkrechten stellt die neue Lage III' des Knotenpunktes III dar. Der Knotenpunkt IV nähert sich III und entfernt sich von II; daher hat man von III' aus $10 \cdot \Delta l_4$ nach unten

*) In Figur 13 ist der Raumersparnis wegen 1 mm = 200 kg angenommen.

hin, $10 \cdot \Delta l_3$ vom Pole aus nach rechts hin abzutragen und in den Endpunkten dieser Strecken wieder Lote zu errichten, wodurch man die neue Lage IV' des Knotenpunktes IV erhält. Analog ergibt sich V', wobei zu beachten ist, daß V sich von IV nach rechts hin entfernt, dagegen dem Knotenpunkte III nach links hin nähert. Der vertikale Abstand des Poles von V' gibt dann die Senkung dieses Knotenpunktes im zehnfachen Maßstab; dieselbe beträgt also 0,95 cm.

Stab-Nr.	Länge (cm)	Querschnitt (cm²)	Stabkonstante r (cm kg)	Stabspannung S (t)	Dehnung Δl (cm)	S^2	$r S^2$
1	800	40	$10 \cdot 10^{-6}$	-10	$-0{,}1$	10^8	1000
2	400	20	$10 \cdot 10^{-6}$	-5	$-0{,}05$	$25 \cdot 10^6$	250
3	400	16	$12{,}5 \cdot 10^{-6}$	$+10$	$+0{,}125$	10^8	1250
4	200	12,5	$8 \cdot 10^{-6}$	-5	$-0{,}04$	$25 \cdot 10^6$	200
5	400	16	$12{,}5 \cdot 10^{-6}$	$+10$	$+0{,}125$	10^8	1250
6	400	25	$8 \cdot 10^{-6}$	-10	$+0{,}08$	10^8	800

$\Sigma r S^2 = 4750$ kg cm.



Figur 13.

3. Nach dem Maxwell-Mohrschen Verfahren läßt sich die Senkung mittels der Formel berechnen:

$$x = \frac{1}{P} \Sigma r S^2,$$

da im vorliegenden Falle das Spannungsbild P, S mit jenem der P, T identisch ist.

Wie aus der Tabelle ersichtlich ist, findet man für den Summenwert 4750 kg cm, also für x

$$x = \frac{4750}{5000} \text{cm} = 0{,}95 \text{ cm}.$$

(Vgl. Föppl II, § 46 und 48.)

10. Aufgabe.

Die erste Zusatzkraft der Relativbewegung ist die sogenannte Zentrifugalkraft; sie ist radial nach aussen gerichtet und hat die Grösse $C = \frac{Q}{g} r \mathfrak{u}^2$, wo mit r die Entfernung des Gewichtes Q vom Scheibenmittelpunkt O bezeichnet ist; für die in die Stangenrichtung fallende Komponente von C findet man $\frac{Q}{g} x \mathfrak{u}^2$. Die zweite Ergänzungskraft ist durch den Ausdruck $-2\, m\, V\, \mathfrak{v}\, \mathfrak{u}$ bestimmt Da die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ des Gewichtes relativ zur Scheibe und die Winkelgeschwindigkeit $\mathfrak{u}$ der Scheibe selbst stets zueinander senkrecht bleiben, so ist die Richtung der zweiten Zusatzkraft eine in der Scheibenebene S zur Stange errichtete Senkrechte, deren Pfeil nach der Seite des Scheibenumfanges oder nach deren mittlerem Teile gerichtet ist, je nachdem sich Q längs der Stange im gleichen oder entgegengesetzten Sinn wie S bewegt. Die Grösse der zweiten Zusatzkraft ist $-2 \frac{Q}{g} \cdot u \frac{dx}{dt}$. Da sie eine in die Stangenrichtung fallende Komponente nicht besitzt, so kommt für die Relativbewegung von Q nur der Betrag $\frac{Q}{g} x u^2$ der ersten Ergänzungskraft und die Federkraft $-c\, x$ in Betracht, so dass man für die Schwingungsbewegung des Gewichtes die folgende Differentialgleichung erhält:

$$\frac{Q}{g} \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} = -cx + \frac{Q}{g} x u^2$$

oder

$$\frac{Q}{g} \frac{d^2 x}{dt^2} = -\left(c - \frac{Q}{g} u^2\right) x.$$

Diese Gleichung stellt eine einfach harmonische Schwingung dar, solange

$$u < \sqrt{\frac{cg}{Q}}$$

bleibt, und zwar ist dann die Schwingungsdauer

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{Q}{cg - Qu^2}}$$

(Vgl. Föppl IV, §§ 4 und 31.)

11. Aufgabe.

Damit die Scheibe gebremst werde, muß das Bremsband 1 das stärker gespannte sein, und zwar ist bei dem gegebenen Reibungskoeffizient

$$T_1 = T_2 \cdot e^{0,3\,\pi} = 2{,}565\ T_2\ .$$

Eine zweite Gleichung für die Berechnung der Spannungen T_1 und T_2 liefert der Momentensatz in bezug auf den Zapfenmittelpunkt Z.

$$20\ \text{kg} \cdot 60\ \text{cm} + T_2 \cdot 5\ \text{cm} = T_1 \cdot 20\ \text{cm}.$$

Ersetzt man hier T_1 durch den oben angegebenen Wert, so findet man:

$$T_2 = 26\ \text{kg, und folglich } T_1 = 66{,}7\ \text{kg}.$$

Die am Scheibenumfang wirkende Bremskraft ist daher

$$T_1 - T_2 = 40{,}7\ \text{kg}.$$

(Vgl. Föppl I., § 40 und Aufg. 27.)

12. Aufgabe.

Die von den Stäben 2, 3, 4 gebildete Scheibe ist mit dem Stabe 8 durch ein im Unendlichen gelegenes imaginäres Gelenk, den Schnitt der Stäbe 1 und 5, verbunden; auch der unendlich ferne Schnittpunkt der Stäbe 6 und 11 bildet ein ebensolches Gelenk für die genannte Scheibe und den Stab 10; endlich gehört zu den Stäben 8 und 10 selbst ein imaginäres Gelenk, der Schnitt der Stäbe 7 und 9. Die drei imaginären Gelenke liegen auf einer Geraden, der unendlich fernen Geraden der Ebene, was das Kennzeichen für den Ausnahmefall ist; die Stabspannungen sind also unendlich gross.

Auch die Hennebergsche Methode führt leicht zur Lösung der Aufgabe. Man ersetze z. B. den Stab 9 durch die Verbindungslinie des Knotenpunktes (2, 4, 5, 6) mit (9, 10, 11); dann werden für den Kräfteplan T die Stäbe 8, 7, 5, 6 und 10 spannungslos und man findet T_e durch Konstruktion des Kräftedreiecks aus P_8, 11 und e. Zeichnet man sodann den Kräfteplan u für das einfache Fachwerk, nachdem man an den Knotenpunkten (1, 8) und (10, 11) in Richtung des Stabes 9 zwei Zugspannungen von der Größe 1 kg angebracht hat, so ergibt sich, dass der Ersatzstab e spannungslos und folglich $X = -\frac{T_e}{u_e} = -\infty$ wird.

(Vgl. Föppl II., § 34, 35 und Aufg. 27.)

13. Aufgabe.

Für den Winkel $\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx$, um welchen der Wellenquerschnitt an der Stelle $x + dx$ gegen jenen an der Stelle x verdreht erscheint, gilt die Gleichung:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx = \frac{2\,M\,dx}{a^4 \pi G}$$

oder

$$M = \frac{1}{2} a^4 \pi G \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x};$$

G ist der Schubelastizitätsmodul, M das Torsionsmoment an der Stelle x; beim Uebergang zum Nachbarquerschnitt ändert sich M um den Betrag $\frac{\partial M}{\partial x} dx$; dieser Zuwachs ist gleich der Summe der Drehmomente, welche von den an dem Wellenstücke dx angreifenden Trägheitskräften hervorgebracht werden. Die Masseneinheit der Welle ist $\frac{Q}{g a^2 \pi l}$, also besitzt das Volumelement die Masse $\frac{Q}{g a^2 \pi l} dv = \frac{Q}{g a^2 \pi l} dF \cdot dx$, wenn dF ein Flächenelement des Querschnittes bezeichnet. Bildet man daher die Momente der Trägheitskräfte und summiert über den ganzen Querschnitt, so erhält man

$$\frac{\partial M}{\partial x} dx = \int \frac{Q}{g a^2 \pi l} \cdot r^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \cdot dF \cdot dx,$$

oder da bei der Integration $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$ und dx konstant bleiben,

$$\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{Q}{g a^2 \pi l} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \int r^2 \cdot dF;$$

das hier noch auftretende Integral ist das Trägheitsmoment des kreisförmigen Querschnittes, hat also den Wert $\frac{a^4 \pi}{2}$, so daß

$$\frac{\partial M}{dx} = \frac{Q a^2}{2 g l} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$$

wird. Andererseits ergibt die Differentiation der oben für M aufgestellten Gleichung nach x:

$$\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{a^4 \pi G}{2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2},$$

so daß man für die von der Welle ausgeführten Torsionsschwingungen folgende Differentialgleichung erhält:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{a^2 \pi G g l}{Q} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}.$$

Wird

$$\varphi = A \sin \alpha x \cdot \sin \beta t$$

gesetzt, so ist

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -A\alpha^2 \cdot \sin \alpha x \cdot \sin \beta t$$

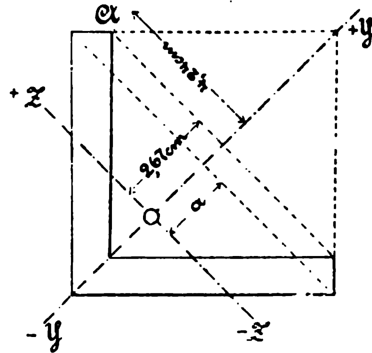
und

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -A\beta^2 \cdot \sin \alpha x \cdot \sin \beta t;$$

es stellt also $\varphi = A \sin \alpha x \cdot \sin \beta t$ ein partikuläres Integral der Differentialgleichung dar, wenn zwischen α und β die Beziehung besteht:

$$\frac{\beta}{\alpha} = a\sqrt{\frac{\pi G g l}{Q}}.$$

(Vgl. Föppl III, § 57, und IV. § 11 und 12)

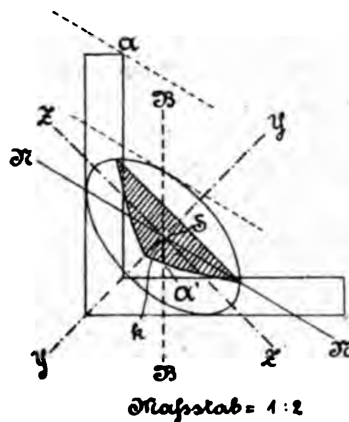


Figur 14.

14. Aufgabe.

Die Lage der Hauptachsen YY und ZZ ergibt sich aus Fig. 14. Der Winkel, welchen die Lastebene mit diesen Richtungen bildet, ist $\alpha = 45°$. Für den Schwerpunktsabstand von der Diagonale des umschriebenen Quadrates findet man durch Anschreiben einer Momenten-Gleichung $a = 19{,}6$ mm. Die Haupt-Trägheitsmomente haben die Größe $\Theta_y = 92{,}1$ cm⁴ und $\Theta_z = 23{,}7$ cm⁴. Das Biegungsmoment nimmt an der Einspannstelle den Wert an: 100 kg · 50 cm = 5000 cm kg; seine Komponenten in Richtung der Hauptachsen sind also $M_y = M_z = 5000 \cdot \sin 45°$ = 3540 cm kg. Die Spannung $\sigma = \sigma_I + \sigma_{II}$ für eine Stelle des Querschnittes mit den Koordinaten y und z wird demnach

$$\sigma = \frac{3540}{92{,}1} \cdot z + \frac{3540}{23{,}7} \cdot y = 38{,}4\,z + 156\,y.$$

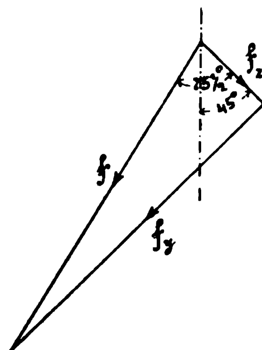


Die größte Spannung tritt an der Kante A auf, wo $\sigma = 38{,}4 \cdot 4{,}24 + 156 \cdot 2{,}67 = 580$ atm wird.

Ist der Querschnittskern gegeben, so läßt sich σ auch nach der Formel berechnen:

$$\sigma = \frac{M}{kF};$$

um k zu finden, zeichne man zunächst durch den Schwerpunkt S die Spur BB der vertikalen Lastebene; sodann ziehe man zu der



Figur 15.

Tangente im Schnittpunkt von BB und der Zentralellipse die Parallele durch S, wodurch die Nullinie NN erhalten wird. Man erkennt jetzt wieder, daß die größte Spannung bei A auftreten muß. Der Parallelstrahl zu NN durch diesen Punkt hat als Antipol den Punkt A' des Querschnittskerns; die Strecke SA' ist dann das gesuchte k. Aus Figur 15 entnimmt man unter Berücksichtigung des Maßstabes $k = 0{,}66$ cm; $F = 13$ cm² und $M = 5000$ cm kg, so daß man für σ den Wert findet

$$\sigma = \frac{5000 \text{ cm kg}}{0{,}66 \text{ cm} \cdot 13 \text{ cm}^2} = 580 \text{ atm.}$$

Um die Richtung zu finden, in welcher die Durchbiegung erfolgt, zerlegt man P in Komponenten nach den Hauptachsen Y und Z und bestimmt die zu diesen Lastebenen gehörigen Biegungspfeile.

$$f_z = \frac{P l^3 \sin 45^0}{3 E \Theta_y}$$

$$f_y = \frac{P l^3 \sin 45^0}{3 E \Theta_z};$$

somit wird

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{f_y}{f_z} = \frac{\Theta_y}{\Theta_z} = \frac{92{,}1}{23{,}7}$$

oder

$$\varphi = 75 \frac{1}{2}^0.$$

Die Durchbiegung erfolgt also unter einem Winkel von $75^1/_2{}^0 - 45^0 = 30^1/_2{}^0$ gegen die Vertikale, und zwar nach der Seite der $-Y$ hin.

(Vgl. Föppl III., §§ 20, 27 und Aufgabe 11, 12 und 13.)

15. Aufgabe.

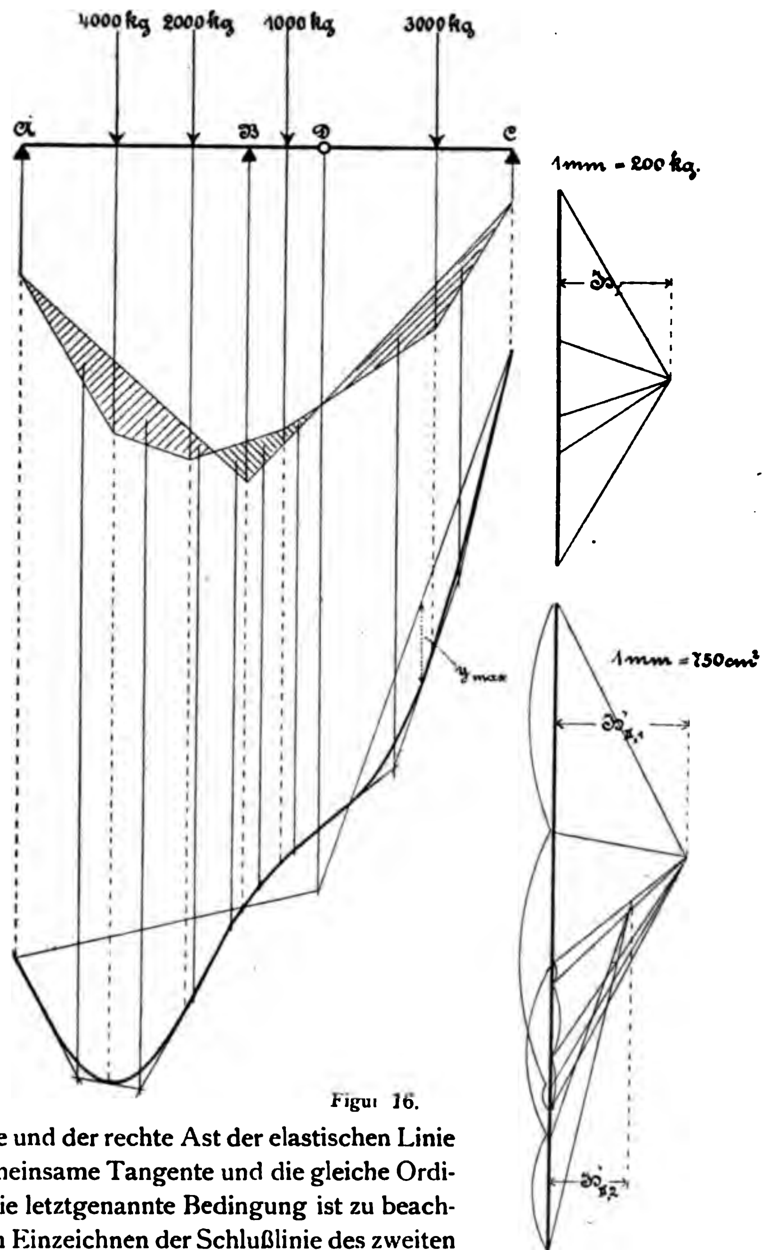
Man konstruiere zunächst mittels des verlangten Horizontalzuges $H_I = 3000$ kg die Momentenfläche des Trägers, wobei für das Eintragen der Schlußlinie zu beachten ist, daß das Gelenk D kein Biegungsmoment aufzunehmen vermag. Die Momentenfläche erscheint, da der Längenmaßstab 1 : 200 ist, 40000fach verkleinert. Für ihre Darstellung beim Zeichnen des zweiten Seilpolygons erweist es sich dann als praktisch 750 cm² = 1 mm zu wählen. Der Horizontalzug des zweiten Seilecks für die linke bezw. rechte Trägerhälfte wird

$$H_{II,1} = \frac{E\Theta_1}{H_I} = \frac{2\,100\,000 \text{ kg/cm}^2 \cdot 15\,000 \text{ cm}^4}{3000 \text{ kg}} = 10\,500\,000 \text{ cm}^2,$$

$$H_{II,2} = \frac{E\Theta_2}{H_I} = \frac{2\,100\,000 \text{ kg/cm}^2 \cdot 9000 \text{ cm}^4}{3000 \text{ kg}} = 6\,300\,000 \text{ cm}^2.$$

Mit Rücksicht auf den gewählten Maßstab müßten die Größen die Längen 14000 und 8400 erhalten. Nimmt man aber hiervon $\frac{1}{800}$, so wird $H'_{II,1} = 17{,}5$ mm und $H'_{II,2} = 10{,}5$ mm; die Ordinaten der elastischen Linie werden infolgedessen 800fach verzerrt, sie erscheinen also in der Zeichnung, da der Längenmaßstab

$\frac{1}{200}$ beträgt, im $\frac{800}{200}$ = Vierfachen der natürlichen Größe. Im Gelenk D besitzt



Figur 16.

der linke und der rechte Ast der elastischen Linie eine gemeinsame Tangente und die gleiche Ordinate. Die letztgenannte Bedingung ist zu beachten beim Einzeichnen der Schlußlinie des zweiten Seilecks für den rechten Teil des Trägers.

Die maximale Durchbiegung auf der Strecke von C bis D ist **3 mm.** (Vgl. Föppl II., §§ 17 und 19.)

16. Aufgabe.

Die vertikale Komponente des Auflagerdruckes ergibt sich durch Anschreiben der Momentengleichung für das rechte Auflager als Momentenpunkt.

$$A \cdot 2r = Pp$$

$$A = P \cdot \frac{p}{2r}.$$

Das Biegungsmoment eines in gleicher Weise belasteten Balkenträgers an der Stelle $r - r\cos\varphi$ ist somit

$$M_b = P\frac{p}{2r} \cdot (r - r\cos\varphi) = \frac{Pp}{2}(1 - \cos\varphi).$$

Man berechnet jetzt die Integrale:

$$\int_0^\pi M_b\, z\, ds = \int_0^\pi \frac{Pp}{2}(1 - \cos\varphi)\, r^2 \sin\varphi\, d\varphi = Pp\, r^2$$

und

$$\int_0^\pi z^2\, ds = \int_0^\pi r^3 \sin^2\varphi\, d\varphi = r^3 \cdot \frac{\pi}{2};$$

dann ergibt sich der Horizontalschub nach der Formel

$$H = \frac{\int M_b\, z\, ds}{\int z^2\, ds} = \frac{2\, Pp}{r\pi}.$$

Das Biegungsmoment für einen beliebigen Querschnitt des Bogenträgers ist

$$M = M_b - Hz$$

$$= \frac{Pp}{2}(1 - \cos\varphi) - \frac{2\, Pp}{\pi}\sin\varphi;$$

es wird zu Null, wenn $Pp\sin^2\frac{\varphi}{2} = \frac{4}{\pi}Pp\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}$

wird, also 1. wenn $\frac{\varphi}{2} = 0$ ist, d. h. im linken Auflager selbst,

2. wenn $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{4}{\pi} = 0{,}7854$ ist,

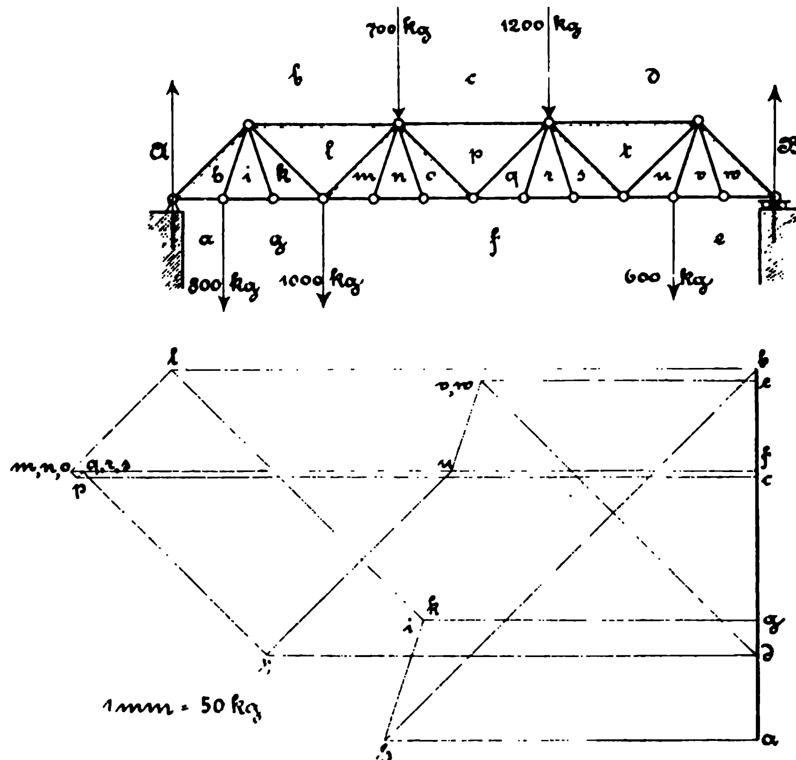
woraus sich für φ der Wert 103° 40′ ergibt. (Vgl. Föppl § 37 und Aufg. 32.)

17. Aufgabe.

Um einen reziproken Kräfteplan zu zeichnen, bedient man sich am einfachsten des Verfahrens von Bow. Man berechnet zuerst mittels des Momentensatzes die beiden Auflagerkräfte

$$A = 2470 \text{ kg}; \quad B = 1830 \text{ kg}$$

und bezeichnet die einzelnen Polygone der Binderfigur mit *a*, *b* . . . *v*, *w*. Dann beginnt man die Zeichnung des Kräfteplans mit dem Antragen der gegebenen Kräfte, deren Endpunkte man mit den Buchstaben jener Polygone versieht, welche die betreffende Kraft als gemeinsame Seite besitzen. Vom linken Auflager ausgehend, kann nun zur Ermittelung der einzelnen Stabspannungen geschritten werden: man zieht durch *a* und *b* Parallele zu den Seiten *ah* bzw.



Figur 17.

bh der Binderfigur, wodurch man im Kräfteplan den Punkt *h* erhält; zum nächsten Knotenpunkt übergehend, zieht man durch den vorher erhaltenen Punkt *h hi* und *ig* parallel den entsprechenden Polygonseiten, was Punkt *i* ergibt, u. s. f. Um zu entscheiden, welche Stäbe auf Zug, welche auf Druck beansprucht sind, hat man nur zu beachten, daß alle an einem Knotenpunkte angreifenden Kräfte im Gleichgewichte stehen müssen und daß an den Knotenpunkten die Reaktionen der Stabspannungen angreifen. Die Größe der letzteren kann aus folgender Tabelle entnommen werden:

Zugspannungen in kg				Druckspannungen		Spannungslose Stäbe
Stab		Stab		Stab		
ak	2500	*qf*	4470	*kb*	3500	*ik*
hi	850	*rf*	4470	*bl*	3900	*mn*
ig	2200	*sf*	4470	*lm*	950	*no*
kg	2200	*tu*	1750	*cp*	4510	*qr*
kl	2370	*uf*	2020	*po*	50	*rs*
mf	4550	*uv*	630	*dt*	3250	*vw*
nf	4550	*ve*	1820	*ts*	1720	
of	4550	*we*	1820	*wd*	2600	
pq	50					

(Vgl. Föppl II., § 5.)

18. Aufgabe.

Da außer dem Gewicht Q und der gleich großen Auflagerkraft an dem Bügel weitere Kräfte nicht angreifen, so erhält man für den durch den Winkel φ bestimmten Querschnitt das Biegungsmoment

$$M = Q\, r \sin \varphi;$$

dasselbe nimmt in der Mitte des Bügels $\left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right)$ den größten Wert an:

$$M_{max} = Q\, r.$$

Die hier auftretende Biegungsbeanspruchung berechnet sich nach der Formel:

$$\sigma = \frac{M}{W}.$$

Das Widerstandsmoment des quadratischen Querschnitts mit der Seitenlänge a ist $\frac{a^3}{6}$, also wird

$$\sigma = \frac{6\, Q\, r}{a^3};$$

soll der höchst zulässige Wert von σ 1000 atm betragen, so ergibt sich für $r = 20$ cm und $a = 2$ cm

$$Q = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \cdot \frac{27\ \text{cm}^3}{6 \cdot 20\ \text{cm}} = 225\ \text{kg}.$$

Für die elastische Spannweitenänderung gilt allgemein

$$\Delta l = \int \frac{M z\, d s}{E \Theta};$$

hierin ist $M = Q\, r \sin \varphi$, $z = r \sin \varphi$, $d s = r\, d \varphi$ und $\Theta = \frac{a^4}{12}$ zu setzen und über den ganzen Bügel, also von $\varphi = 0$ bis $\varphi = \pi$ zu integrieren; die Ausführung ergibt:

$$\Delta l = \frac{6\, Q \cdot r^3 \pi}{a^4 E} = \frac{6 \cdot 225\ \text{kg} \cdot 8000\ \text{cm}^3\, \pi}{81\ \text{cm}^4 \cdot 2 \cdot 10^6\ \text{kg/cm}^2} = 0{,}2\ \text{cm}.$$

Wird dem Gewicht ein kleiner Stoß in vertikaler Richtung erteilt, so führt es eine harmonische Schwingung aus, deren Gleichung

$$m \frac{d^2 x}{d t^2} = Q - c x$$

ist, wenn als Nullpunkt das untere Ende des Bügels im unbelasteten Zustand gewählt wird. Für $x = 0{,}2$ cm hält dann Q der elastischen Kraft gerade das Gleichgewicht, so dass

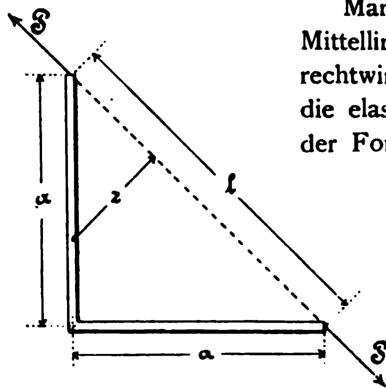
$$c = \frac{225 \text{ kg}}{0{,}2 \text{ cm}} = 1125 \text{ kg/cm}$$

wird. Die Schwingungsdauer ergibt sich nun aus der Formel:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}} = 0{,}1 \text{ sec.}$$

(Vgl. Föppl III., §§ 18, 38; IV., § 4 und Aufg. 5.)

19. Aufgabe.



Figur 18.

Man betrachtet den Rahmen als Bogen, dessen Mittellinie von den Katheten eines gleichschenkelig rechtwinkeligen Dreiecks gebildet wird, und berechnet die elastische Verschiebung der Punkte A und B nach der Formel:

$$\Delta l = \int \frac{M z}{E \Theta} ds;$$

darin ist z der Abstand eines Punktes des Rahmens von AB, $ds = dz \cdot \sqrt{2}$ und $M = Pz$; somit wird

$$\Delta l = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}\, P}{E \Theta} \int_0^{\frac{a}{2}\sqrt{2}} z^2 \, dz = \frac{1}{3} \cdot \frac{P a^3}{E \Theta};$$

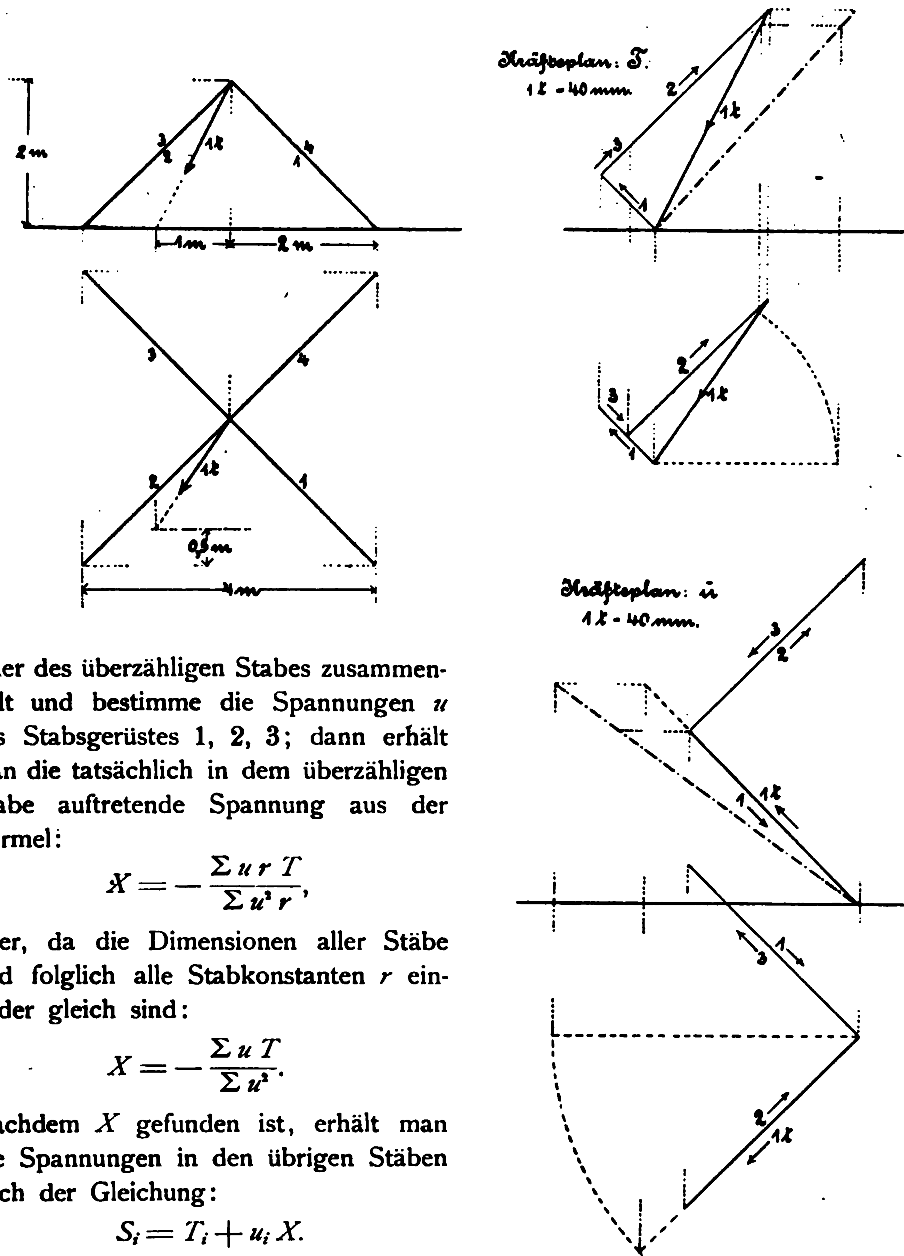
$\Theta = \frac{6^4}{12}$ cm^4; $P = 400$ kg; $a = 80$ cm; $E = 2\,000\,000$ kg/cm^2, also

$$\Delta l = \frac{400 \text{ kg} \cdot 12 \cdot 80^3 \text{ cm}^3}{3 \cdot 2\,000\,000 \text{ kg/cm}^2 \cdot 6^4 \text{ cm}^4} = 0{,}8 \text{ cm.}$$

(Vgl. Föppl III., § 38 und Aufg. 31.)

20. Aufgabe.

Um die Stabspannungen nach dem Maxwell-Mohrschen Verfahren zu berechnen, betrachte man etwa Stab 4 als den überzähligen und konstruiere nach dessen Entfernung den Kräfteplan T, der die von $P = 1\,t$ hervorgerufenen Stabspannungen des Hauptnetzes ergibt. Hierauf bringe man an den Endpunkten des Stabes 4 zwei Zugspannungen von je $1\,t$ an, deren Richtung mit-



Figur 19.

jener des überzähligen Stabes zusammenfällt und bestimme die Spannungen u des Stabsgerüstes 1, 2, 3; dann erhält man die tatsächlich in dem überzähligen Stabe auftretende Spannung aus der Formel:

$$X = -\frac{\Sigma\, u\, r\, T}{\Sigma\, u^2\, r},$$

oder, da die Dimensionen aller Stäbe und folglich alle Stabkonstanten r einander gleich sind:

$$X = -\frac{\Sigma\, u\, T}{\Sigma\, u^2}.$$

Nachdem X gefunden ist, erhält man die Spannungen in den übrigen Stäben nach der Gleichung:

$$S_i = T_i + u_i X.$$

Die Größe der T_i ermittelt man entweder graphisch aus den beiden Rissen oder im vorliegenden Falle bequemer nach der Formel: $T_i = T_i' \cdot \frac{1}{2}\sqrt{6}$, wobei T_i' die Länge des ersten oder zweiten Risses bezeichnet.

Stab-Nr.	T in t	Verhältniszahl u	$u \cdot T$	u^2	S in t
1	$-0{,}306$	$+1$	$-0{,}306$	1	$-0{,}386$
2	$-0{,}797$	-1	$+0{,}797$	1	$-0{,}717$
3	$-0{,}171$	$+1$	$-0{,}171$	1	$-0{,}251$
4	0	$+1$	0	1	$-0{,}080$
			$\Sigma: +0{,}320$	4	
			$X = -0{,}08\,t$		

(Vgl. Föppl II., § 49.)

21. Aufgabe.

Bezeichnet man den Winkel, um welchen der Ring zur Zeit t aus seiner Gleichgewichtslage abgelenkt ist, mit $\Delta\varphi$, so wird nach dem Flächensatze

$$\Theta \frac{d^2 \Delta\varphi}{d t^2} = K;$$

das Trägheitsmoment Θ des Ringes um seinen vertikalen Durchmesser ist gleich der Hälfte seines polaren Trägheitsmomentes, also

$$\Theta = \frac{1}{2} M r^2 = \frac{Q}{2g} r^2 = 0{,}0255 \text{ kg cm/sec}^2.$$

Für das durch die Torsion des Drahtes hervorgerufene Kräftepaar K erhält man aus der Gleichung:

$$\Delta\varphi = \frac{2 K l}{a^4 \pi G}$$

durch Auflösen nach K:

$$K = \frac{a^4 \pi G}{2 l} \cdot \Delta\varphi.$$

Die obige Differentialgleichung geht daher über in:

$$\Theta \frac{d^2 \Delta\varphi}{d t^2} = -\frac{a^4 \pi G}{2 l} \cdot \Delta\varphi;$$

das Minuszeichen trägt dem Umstande Rechnung, daß einer Vergrößerung des Torsionswinkels eine Abnahme der Winkelgeschwindigkeit entspricht. Man hat es demnach mit einer einfach harmonischen Schwingung zu tun, für deren Dauer man erhält:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\Theta \cdot 2 l}{a^4 \pi G}} = 2\pi \sqrt{\frac{0{,}0255 \cdot 400}{\frac{0{,}05^4}{2^4} \pi \cdot 800\,000}} = 20 \text{ sec.}$$

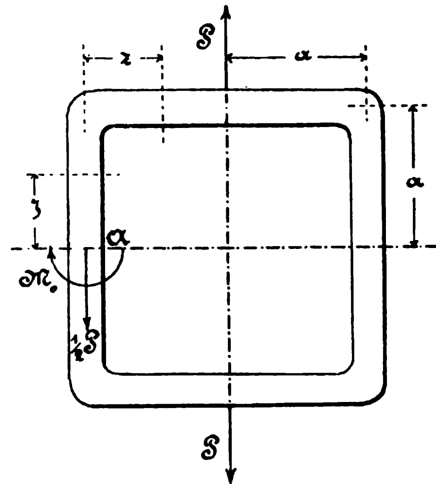
(Vgl. Föppl III., § 57; IV., § 4 und § 18.)

22. Aufgabe.

Die Berechnung kann hier in ähnlicher Weise erfolgen wie bei einem Ringe, der längs eines Durchmessers auf Zug beansprucht wird. Man betrachte

an Stelle des ganzen Rahmens einen Quadranten desselben, z. B. den links oben gelegenen. Um denselben für sich im Gleichgewicht zu halten, muss an der Stelle A eine Normalkraft von der Größe $\frac{P}{2}$ und ein vorerst unbekanntes Moment M_0 übertragen werden. Das Biegungsmoment für irgend eine Stelle des vertikalen Rahmenteiles ist dann M_0, da hier die Normalkraft $\frac{P}{2}$ ein Biegungsmoment nicht hervorbringt; für eine Stelle des horizontalen Teiles erhält man:

$$M = M_0 - \frac{P}{2} z.$$



Figur 20.

Die Endquerschnitte des Rahmenquadranten müssen auch nach der Formänderung rechtwinkelig zueinander bleiben, so daß sich M_0 aus der Gleichung bestimmen läßt:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Delta\, d\varphi = 0.$$

$$\Delta\, d\varphi = \frac{M\, ds}{E\Theta},$$

also, wenn man für M seine Werte einsetzt und über den vertikalen bezw. horizontalen Teil des Rahmenquadranten integriert:

$$0 = \int_0^a \frac{M_0\, d\zeta}{E\Theta} + \int_0^a \frac{\left(M_0 - \frac{P}{2} z\right) dz}{E\Theta} = 2\frac{M_0 a}{E\Theta} - \frac{Pa^2}{4E\Theta};$$

hieraus folgt:

$$M_0 = \frac{Pa}{8}.$$

Das größte Biegungsmoment ist daher negativ und tritt in der Mitte des horizontalen Rahmenteiles auf:

$$M_{z=a} = -\frac{3}{8} Pa = -750 \text{ kg cm}.$$

Die Beanspruchung des Materials an dieser Stelle ist, da das Widerstandsmoment des quadratischen Querschnittes von der Seitenlänge h

$$W = \frac{h^3}{6}$$

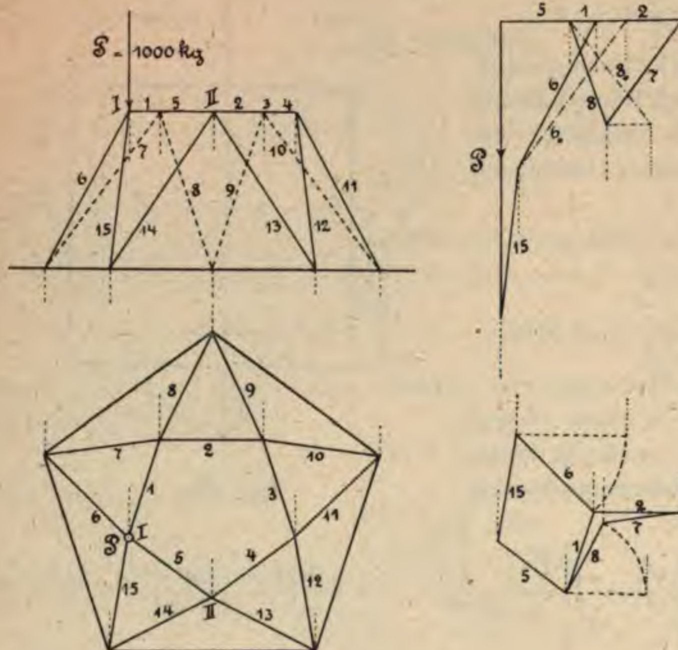
ist,

$$\sigma = \frac{M}{W} = \frac{6 \cdot 750}{4^3} = 83 \text{ atm}.$$

(Vgl. Föppl III., § 41.)

23. Aufgabe.

Ist nur Knotenpunkt I der Netzwerkkuppel belastet, so sind die von den unbelasteten Knotenpunkten ausgehenden Stäbe des Nabelringes abwechselnd gezogen und gedrückt, weshalb die Stäbe 1 und 5 Spannungen gleichen Vorzeichens aufzunehmen haben. Aus der regelmäßigen Anordnung des Grundrisses und der symmetrischen Lage der Kraft P gegen diesen folgt weiter, daß die Spannungen der Stäbe 1 und 5 einerseits, 2, 3 und 4 andrerseits gleich groß sein müssen. Analoges gilt auch von den Netzwerkstäben 6 und 15 bezw. 7 bis 14.



Figur 21.

Um die Größe der Spannungen zu finden, geht man vom belasteten Knotenpunkt I aus und konstruiert i. Grundriß unter willkürlicher Annahme der Spannung S_1 das windschiefe Fünfeck der auf I übertragenen Kräfte P, S_1, S_5, S_6 und S_{15}, indem man der eben gemachten Bemerkung entsprechend die Gleichheit der Spannungen S_1 und S_5 bezw. S_6 und S_{15} berücksichtigt und beachtet, daß die Grundrißprojektion von P gleich Null ist. Nunmehr läßt sich auch der Aufriß jenes Kräftefünfecks zeichnen, dessen Schlußseite die Kraft P nach Größe und Richtung darstellen muß; hiedurch ist also nachträglich der Kräftemaßstab festgelegt: die Kraft $P = 1000$ kg ist in Figur 21 durch eine Strecke von der Länge 40 mm dargestellt, so daß 1 mm 25 kg entspricht. Die Größe von S_1 und S_5 kann aus dem Grundriß ohne weiteres entnommen werden, $S_6 = S_{15}$ bestimmt man nach den Regeln der darstellenden Geometrie. Da $S_1 = - S_2$ bekannt ist, so lassen sich jetzt auch S_7 und S_8 und damit auch die Spannungen der übrigen Stäbe bestimmen. Bei der Ermittelung der beiden Risse des Kräftevierecks 1, 2, 7, 8 müssen natürlich die Risse der Schlußecke

lotrecht übereinander liegen, was eine Kontrolle für die Genauigkeit der Zeichnung abgibt. Die Größe der einzelnen Stabspannungen ist aus der nachfolgenden Zusammenstellung zu entnehmen:

$S_1 = S_3 = S_5 = -460$ kg; $S_2 = S_4 = +460$ kg; $S_6 = S_{15} = -980$ kg;
$S_7 = S_{10} = S_{11} = S_{14} = +700$ kg; $S_8 = S_9 = S_{12} = S_{13} = -700$ kg.

Wird an dem Knotenpunkt I eine Last von 2000 kg angebracht, so braucht man nur die eben ermittelten Spannungswerte zu verdoppeln. Eine an Knotenpunkt II wirkende Last von 3000 kg ergibt ein Spannungsbild, das dem vorher behandelten vollständig ähnlich ist: die Vorzeichen der Spannungen erhält man, indem man sich Punkt I in die Lage II übergeführt denkt; die oben angegebenen Werte sind dabei zu verdreifachen. Man erhält so:

$S_4 = S_5 = S_2 = -1380$ kg; $S_1 = S_3 = +1380$ kg; $S_{13} = S_{14} = -2940$ kg;
$S_{12} = S_{15} = S_8 = S_9 = +2100$ kg; $S_6 = S_7 = S_{10} = S_{11} = -2100$ kg.

Werden 2000 kg an I und gleichzeitig 3000 kg an II angebracht, so hat man die Spannungen, welche jede dieser Lasten für sich in einem Stabe hervorbringt, algebraisch zu summieren. Man findet dann:

$S_1 = S_3 = +460$ kg; $S_2 = S_4 = -460$ kg; $S_5 = -2300$ kg;
$S_6 = -4060$ kg; $S_7 = S_{10} = S_{11} = -700$ kg; $S_8 = S_9 = S_{12} = +700$ kg;
$S_{13} = -4340$ kg; $S_{14} = -1540$ kg; $S_{15} = +140$ kg.

(Vgl. Föppl II., § 43.)

24. Aufgabe.

Die Momente der an den beiden Maßen $\frac{Q}{g}$ angreifenden Trägheitskräfte für den Aufhängepunkt A als Momentenpunkt sind $-\frac{Q}{g}\cdot l^2 \frac{d^2\varphi}{dt^2}$ und $-\frac{Q}{g}\cdot 4\,l^2 \frac{d^2\varphi}{dt^2}$, die Momente der äußeren Kräfte Q sind $-Q\,l\sin\varphi$ und $-Q\cdot 2\,l\sin\varphi$. Das d'Alembertsche Prinzip ergibt daher die Gleichung:

$$-5\,\frac{Q}{g}\,l^2\,\frac{d^2\varphi}{dt^2} - 3\,Q\,l\sin\varphi = 0 \quad . \quad . \quad 1.$$

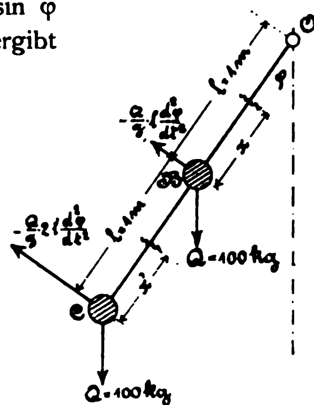
oder für kleine Ausschläge:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{3}{5}\,\frac{g}{l}\,\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2.$$

Hieraus folgt für die Schwingungsdauer T

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{5}{3}\cdot\frac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{5}{3\cdot 9{,}81}}\ \text{sec} = 2{,}59\ \text{sec}.$$

Das von der Stange in dem Teil AB aufgenommene Biegungsmoment ist



Figur 22.

$$M = -\frac{Q}{g} l x \frac{d^2\varphi}{dt^2} - \frac{Q}{g} \cdot 2l(l+x)\frac{d^2\varphi}{dt^2} - Qx \sin\varphi - Q(l+x)\sin\varphi$$

$$= -\frac{Q}{g} l(2l+3x)\frac{d^2\varphi}{dt^2} - Q(l+2x)\sin\varphi,$$

oder nach Einführung des aus 1.) folgenden Wertes für $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$

$$M = \frac{Q}{5}(l-x)\sin\varphi.$$

In gleicher Weise erhält man für einen Querschnitt des Teiles BC

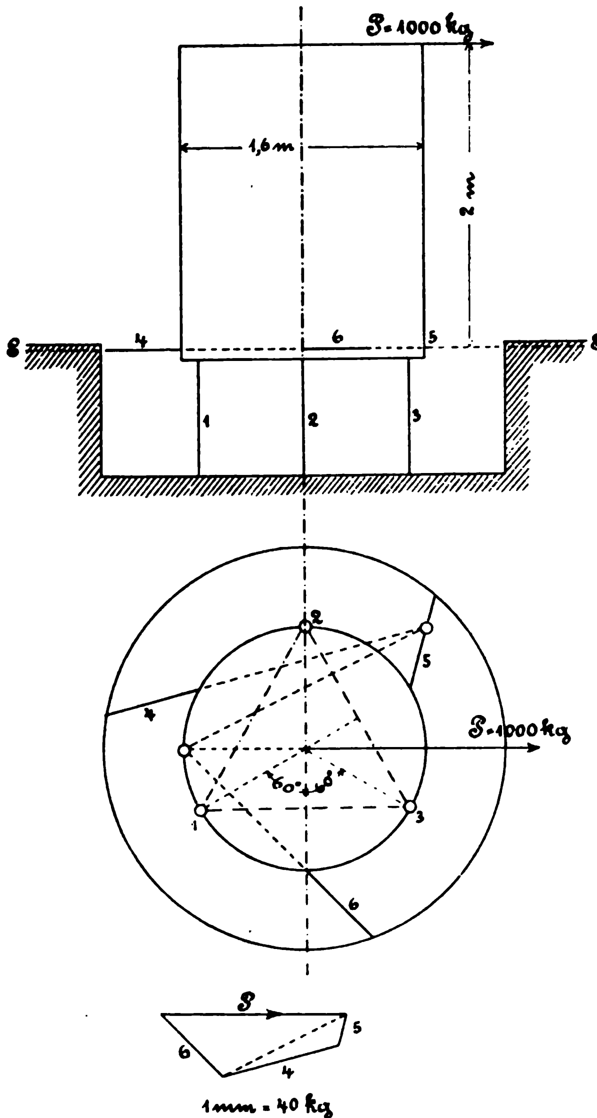
$$M = \frac{Q}{5} x' \sin\varphi.$$

Das größte Biegungsmoment tritt also in der Mitte der Stange ($x = 0$, $x' = l$) auf, wenn φ seinen größten Wert erreicht hat; es ist

$$M_{\max} = \frac{Q}{5} l \sin\alpha$$

$$= 10 \text{ m kg}.$$

(Vgl. Föppl IV., § 12.)



Figur 23.

25. Aufgabe.

Man lege durch die Richtung P eine Ebene π senkrecht zur Ebene ε der drei Stäbe 4, 5, 6. (Fig. 23.) Dann kann die gegebene Kraft $P = 1000$ kg ersetzt werden durch eine gleich große in die Schnittlinie $\varepsilon\pi$ fallende Kraft P_ε und in ein Kräftepaar von der Größe 2000 m kg, dessen Momentenvektor zur Ebene π senkrecht steht. P_ε läßt sich in Ebene ε nach den gegebenen Richtungen 4, 5, 6 zerlegen, wodurch man die Spannungen

dieser Stäbe erhält. Man findet aus dem Kräfteplane $S_4 = +\ 640$ kg, $S_5 = -\ 180$ kg und $S_6 = -\ 460$ kg. Das vorher erwähnte Kräftepaar muß von den Stäben 1, 2, 3 aufgenommen werden; da der Momentenvektor zur Ebene π und also auch zu der durch die Stäbe 1 und 3 bestimmten Ebene senkrecht steht, so folgt, daß der Stab 2 spannungslos sein muß; demnach sind S_1 und S_3 gleich groß, aber von entgegengesetztem Vorzeichen, und da sie ein links drehendes Moment ergeben müssen, ist 1 gezogen, 3 gedrückt. Der Hebelarm des durch S_1 und S_3 hervorgerufenen Kräftepaares ist $2 \cdot 0{,}8$ m $\cdot \sin 60^\circ = 1{,}39$ m; also wird

$$S_1 = \frac{1000\ \text{kg} \cdot 2\ \text{m}}{1{,}39\ \text{m}} = +\ 1440\ \text{kg}$$

$$S_3 = -\ 1440\ \text{kg}.$$

Die Spannungen der vertikalen Stäbe hätten auch auf folgende Weise leicht gefunden werden können. Man ziehe in der oben mit ε bezeichneten Ebene die die Stäbe 1 und 3 schneidende Gerade, projiziere alle Kräfte auf eine zu dieser Achse senkrechte Ebene und schreibe die Momentengleichung in bezug auf den Schnittpunkt jener Achse mit der Ebene an. Die Momente der Spannungen 1, 3, 4, 5 und 6 sind Null, da diese Kräfte durch den Momentenpunkt gehen; das Moment der Kraft P um die Achse ist ebenfalls Null, weil die Projektion von P auf die Ebene Null ist. Für die Spannung S_2, die sich in die Ebene in ihrer wirklichen Größe projiziert, liefert daher die Momentengleichung $S_2 = 0$. Hierauf lege man eine zweite Achse in Ebene ε, welche die Stäbe 2 und 3 schneidet und bilde wieder die Momente um diese Achse; man erhält dann:

$$S_1 \cdot 1{,}2\ \text{m} = 1000\ \text{kg} \cdot \cos 30^\circ \cdot 2\ \text{m}$$

oder:

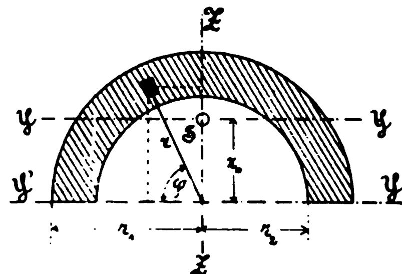
$$S_1 = +\ 1440\ \text{kg}.$$

In gleicher Weise ergibt sich $S_3 = -\ 1440$ kg. (Vgl. Föppl II., 3. Abschn.)

26. Aufgabe.

Eine Schwerlinie des Halbringes ist seine Symmetrieachse ZZ; der auf ihr gemessene Abstand a des Schwerpunktes vom horizontalen Ringdurchmesser ist

$$a = \frac{\int_{r_1}^{r_2} \int_0^{\pi} r^2 \sin\varphi \, dr \, d\varphi}{\frac{1}{2}(r_1^2 - r_2^2)\pi} = \frac{4}{3\pi} \cdot \frac{r_1^3 - r_2^3}{r_1^2 - r_2^2} = 14{,}8\ \text{cm}.$$



Figur 24.

Die Trägheitsmomente um die beiden Hauptachsen ZZ und YY ergeben sich

am einfachsten durch folgende Ueberlegung: das polare Trägheitsmoment des vollständigen Ringes ist

$$\Theta_p = \frac{\pi}{2}(r_1^4 - r_2^4);$$

aus Symmetriegründen ist dann $\Theta_{y'} = \Theta_z = \frac{1}{2}\Theta_p$; für den Halbring erhält man also

$$\Theta_{y'} = \Theta_z = \frac{\pi}{8}(r_1^4 - r_2^4).$$

Das auf die Hauptachse YY bezogene Trägheitsmoment Θ_y des Halbringes ergibt sich aus der Beziehung

$$\Theta_y = \Theta_{y'} - a^2 F$$

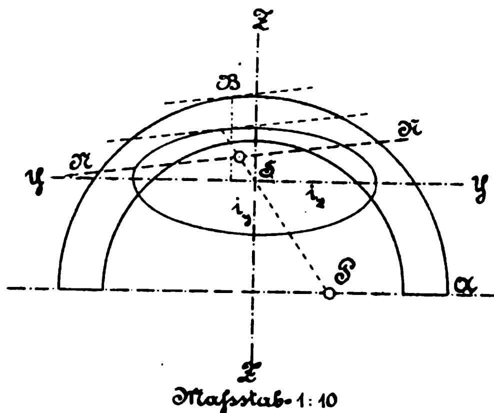
$$= \frac{\pi}{8}(r_1^4 - r_2^4) - \frac{8}{9\pi} \cdot \frac{(r_1^3 - r_2^3)^2}{r_1^2 - r_2^2}.$$

Die Trägheitsradien i_z und i_y werden daher

$$i_z = \sqrt{\frac{\Theta_z}{F}} = \frac{1}{2}\sqrt{r_1^2 + r_2^2} = 16{,}4 \text{ cm}$$

und

$$i_y = \sqrt{\frac{\Theta_y}{F}} = \sqrt{\frac{r_1^2 + r_2^2}{4} - \frac{16}{9\pi^2} \cdot \frac{(r_1^3 - r_2^3)^2}{(r_1^2 - r_2^2)^2}} = 7{,}15 \text{ cm}.$$



Figur 25.

Nachdem die Zentralellipse aus diesen beiden Achsen konstruiert ist, findet man die Nullinie NN als die zum Angriffspunkte der Kraft P gehörige Antipolare.

Die größten Spannungen treten in den Punkten A und B auf, deren Koordinaten y und z aus Figur 25 entnommen werden; für A findet man $y = +26$ cm, $z = -14{,}8$ cm, für B: $y = -3{,}2$ cm, $z = +11{,}2$ cm. Die an diesen Stellen herrschenden Spannungen ergeben sich nach der Formel

$$\sigma = \frac{P}{F}\left(1 + \frac{v z}{b^2} + \frac{u y}{a^2}\right);$$

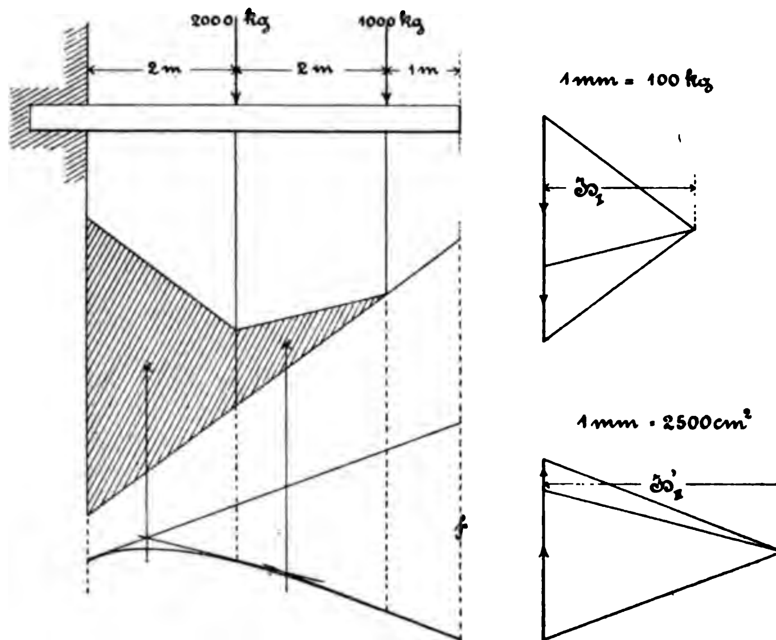
da $P = -1000$ kg und $F = 432$ cm² beträgt, ferner $a = i_z$ und $b = i_y$ ist, so erhält man

$$\sigma_A = -14{,}7 \text{ atm}; \quad \sigma_B = +5{,}6 \text{ atm}.$$

(Vgl. Föppl I., § 27; III., § 21.)

27. Aufgabe.

Man beginnt mit dem Zeichnen der Momentenfläche, für welche der Horizontalzug $H_I = 2000$ kg gewählt wurde. Der Längenmaßstab ist 1:100, also erscheinen die Flächen 10000fach verkleinert. Für die Konstruktion des zweiten Seilpolygons ist es dann zweckmäßig, 2500 cm² durch 1 mm darzustellen. Dabei sind die Flächen durch Strecken mit aufwärts gerichtetem Pfeile



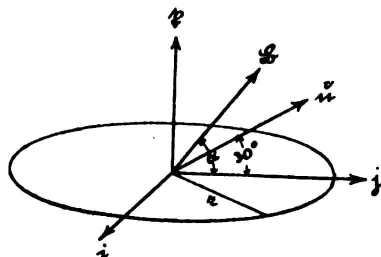
Figur 26.

dargestellt, weil das Biegungsmoment an allen Stellen des Trägers negativ ist. Der Horizontalzug H_{II} müßte, entsprechend der Gleichung $H_{II} = \frac{E\Theta}{H_I} = 8 \cdot 10^6\,\text{cm}^2$ in der Zeichnung eine Länge von 3200 mm erhalten. Wählt man statt dessen $H_{II}' = 32$ mm, so erscheint die elastische Linie in hundertfacher Verzerrung. Die Durchbiegung des rechten Trägerendes d. h. der lotrechte Abstand desselben von der Tangente an die elastische Linie im Einspannquerschnitte ergibt sich aus der Zeichnung wegen der 100fachen Verzerrung und des Längenmaßstabes 1:100 in natürlicher Größe; man findet

$$f = 29 \text{ mm}.$$

(Vgl. Föppl II., § 17 und 19.)

28. Aufgabe.



Figur 27.

Um die Größe und Richtung des Dralles $\mathfrak{B}$ zu bestimmen, beziehen wir ihn auf ein mit der Scheibe fest verbundenes, rechtwinkeliges Koordinatensystem $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$. Die Richtung von $\mathfrak{j}$ falle mit der Projektion von $\mathfrak{u}$ auf die Scheibenebene zusammen, $\mathfrak{i}$ stehe auf $\mathfrak{j}$ in der Scheibenebene, $\mathfrak{k}$ auf dieser selbst senkrecht. Das polare Trägheitsmoment der Scheibe ist

$$\Theta_3 = \frac{M r^2}{2},$$

also $\Theta_1 = \Theta_2 = \frac{M r^2}{4}$. Für die Komponenten von $\mathfrak{u}$ findet man

$$u_1 = 0;\ u_2 = u \cos 30^0 = \frac{u}{2}\sqrt{3};\ u_3 = u \sin 30^0 = \frac{u}{2}.$$

Man erhält daher:

$$B_1 = u_1 \Theta_1 = 0;\quad B_2 = u_2 \Theta_2 = \frac{M r^2}{8} u \sqrt{3};\quad B_3 = u_3 \Theta_3 = \frac{M r^2}{4} u.$$

Der Drall $\mathfrak{B}$ bleibt also dauernd in der Ebene $\mathfrak{j}\,\mathfrak{k}$; er bildet dabei mit $\mathfrak{j}$ den Winkel α, der durch die Gleichung bestimmt ist:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{B_3}{B_2} = \frac{2}{3}\sqrt{3},$$

woraus der Wert

$$\alpha = 49^0$$

hervorgeht. Der Oeffnungswinkel des Kegels, welchen $\mathfrak{B}$ um $\mathfrak{u}$ beschreibt, ist daher $2 \cdot (49^0 - 30^0) = 38^0$.

Die Größe von $\mathfrak{B}$ findet man aus

$$B = \sqrt{B_2^2 + B_3^2} = \frac{1}{8} M r^2 u \sqrt{7};$$

setzt man hier die gegebenen Werte ein, so ergibt sich

$$B = \frac{\sqrt{7}}{8} \cdot \frac{300\,\text{kg} \cdot 1\,\text{m}^2 \cdot 300 \cdot 2\pi}{9{,}81\,\text{m/sec}^2 \cdot 60\,\text{sec}} = 318\ \text{m kg sec}.$$

Um die verlangte Rotation zu erzwingen, muß auf die Achse von den Lagern ein Kräftepaar $\mathfrak{K}$ übertragen werden; nach dem Flächensatze ist

$$\mathfrak{K} = \frac{d\mathfrak{B}}{dt}$$

oder, wenn man wieder in Komponenten zerlegt,

$$K_1 = \frac{dB_1}{dt} = \Theta_1 \frac{du_1}{dt};\quad K_2 = \frac{dB_2}{dt} = \Theta_2 \frac{du_2}{dt};\quad K_3 = \frac{dB_3}{dt} = \Theta_3 \frac{du_3}{dt}.$$

Mit Rücksicht auf die Eulerschen Gleichungen wird somit:

$$K_1 = u_2 u_3 (\Theta_3 - \Theta_2) = \frac{M r^2 u^2}{16} \sqrt{3} = 3250 \text{ m kg}$$
$$K_2 = u_3 u_1 (\Theta_1 - \Theta_3) = 0$$
$$K_3 = u_1 u_2 (\Theta_1 - \Theta_2) = 0.$$

Das statische Moment des Kräftepaares, das von den Lagern aufgenommen werden muß, ist ebenso groß, aber entgegengesetzt gerichtet. (Vgl. Föppl IV., § 21.)

29. Aufgabe.

Der Biegungspfeil des einen Trägers muß gleich dem des andern werden. Für den die Spannweite l überbrückenden, eingespannten Balken ist, wenn der auf ihn treffende Anteil der Kraft $P = 1000$ kg mit Z bezeichnet wird

$$E\Theta \cdot f = \frac{Z l^3}{192};$$

für den beiderseits frei aufliegenden Balken, der in der Mitte die Last $P - Z$ aufnimmt, ist

$$E\Theta \cdot f = \frac{(P - Z) l^3}{48}.$$

Folglich ist

$$\frac{Z l^3}{192} = \frac{(P - Z) l^3}{48}$$

und

$$Z = \frac{4}{5} P = 800 \text{ kg}.$$

Der von dem eingespannten Balken aufgenommene Lastteil ist 800 kg, also treffen auf den frei aufliegenden Träger 200 kg.

Die Einsenkung f beträgt:

$$f = \frac{Z l^3}{192 E\Theta} = \frac{800 \text{ kg} \cdot 600^3 \text{ cm}^3}{192 \cdot 2 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2 \cdot 7000 \text{ cm}^4} = 0,6 \text{ cm}.$$

(Vgl. Föppl III., § 23 und Aufgabe 22.)

III. Darstellende Geometrie.*)

1. Aufgabe.

Konstruktion der Pyramide.

Fällt man von der Spitze S eine Senkrechte auf die Gerade g, so ist der Fusspunkt M derselben der Mittelpunkt der Basis der Pyramide. (Betreffs Konstruktion vergl. Aufgabe 15, 1. b.) Nun zeichnet man mit Hilfe einer Spurparallelen die Spuren $E' E''$ der Basisebene der regulären Pyramide und klappt diese Ebene um E' in dem Grundriß um. $M_0 A_1$ ist der Radius des dem Basisfünfecke umgeschriebenen Kreises, womit man das Fünfeck zeichnen kann. Bei der Zurückdrehung der Ebene E in die ursprüngliche Lage bedient man sich der Affinitätsbeziehung: $C_0 M_0 I$, $M_0 B_0 II$ u. s. w.

Konstruktion der Schnittebene.

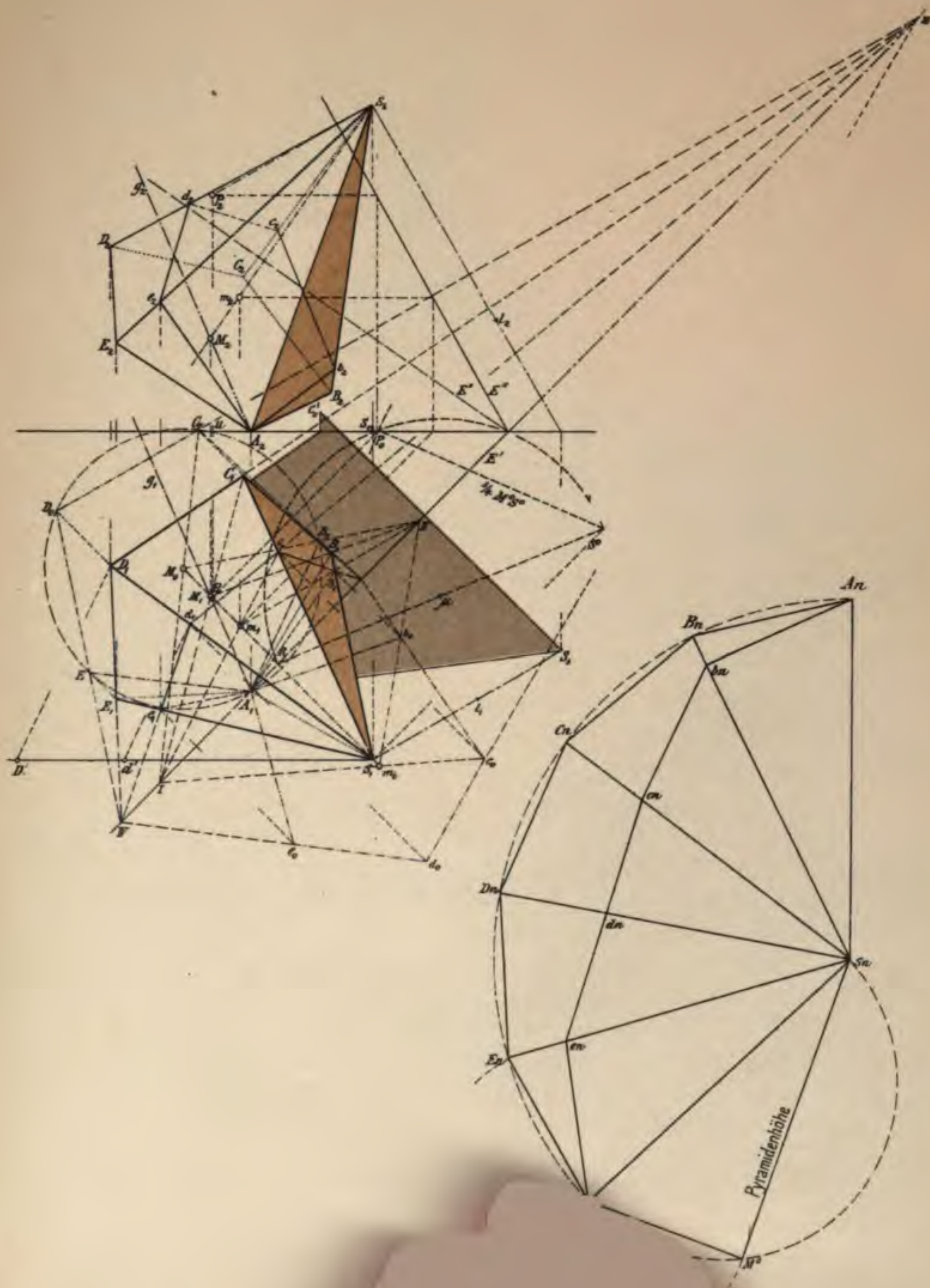
Da die Schnittebene dieselbe Grundrißspur besitzt wie die Basisebene der Pyramide, so muß auch die Grundrißprojektion des senkrechten Abstandes der Spitze S von der Schnittebene in $S_1 M_1$ fallen. Man denke sich nun die lotrechte Ebene durch SM um $S_1 M_1$ in den Grundriß umgelegt. ($S'' S_1 \perp S_1 M_1$; $S'' S_1 = S_2 S_{12}$.) Hierauf verbinde man S' mit dem Schnittpunkt von E' und $S_1 M_1$ d. i. R und schlage über diese Strecke einen Halbkreis. Auf diesem Kreis schneide man von S_0 aus auf dem Kreis den Punkt P_0 mit der Länge $^3/_4$ der wahren Größe von SM ab. P_0 ist ein Punkt der gesuchten Ebene. Zieht man $P_0 P_1 \parallel E'$, so erhält man P_1. P_2 findet man durch $P_2 P_{12} = P_0 P_1$. Die Spur E''' (= Aufrißspur der Schnittebene) ist dann senkrecht auf $S_2 P_2$.

Die Schnittfigur kann ohne weiteres als affine Figur zum Basisfünfeck der Pyramide unter Benützung der Punkte (m_1, m_2 etc.) gezeichnet werden, nachdem man m_1, m_2 als Durchstoßpunkt der Höhe PS durch die Schnittebene bestimmt hat.

Die wahre Größe des Schnittes findet man auch mit Hilfe der Affinitätsbeziehung, nachdem man m_0 ermittelt hat.

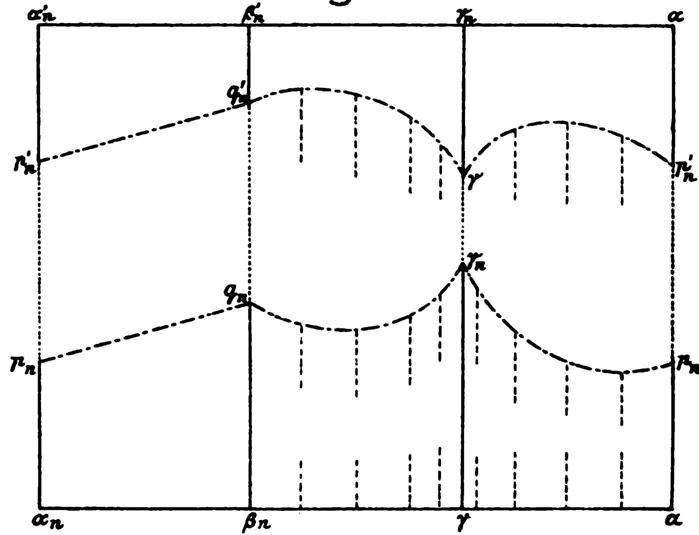
Die Abwicklung und Schattenkonstruktion bietet keine Schwierigkeit.

*) Betreffs Aufgabe 2, 4 u. s. w. siehe Inhaltsangabe.

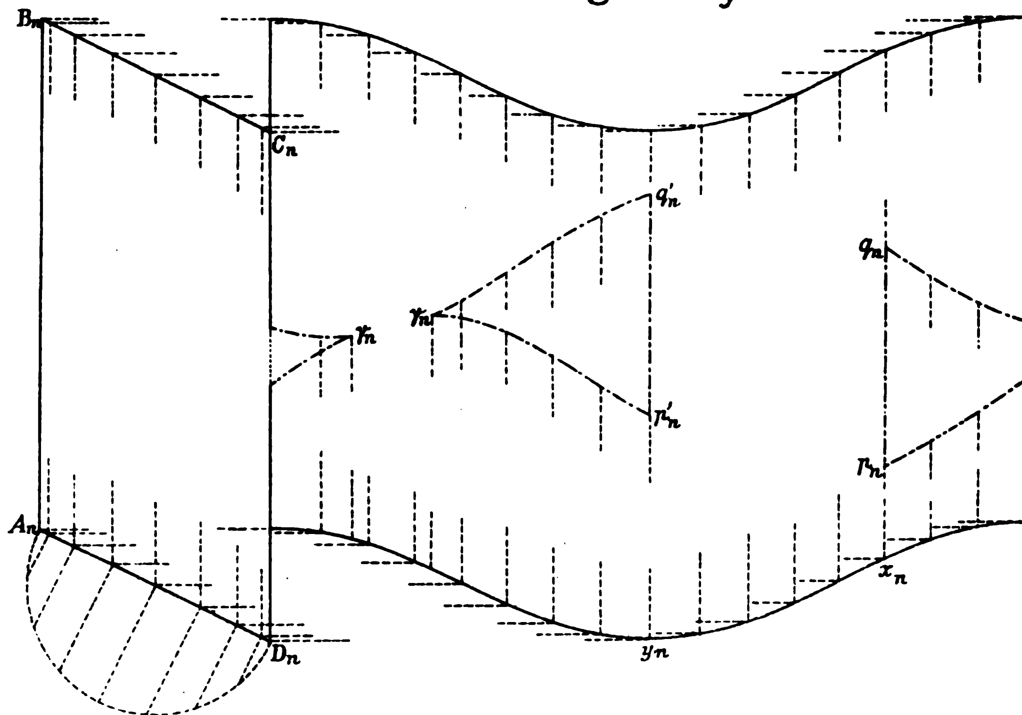


Lith. Hubert Köhler, München.

Abwicklung des Prisma.



Abwicklung des Cylinders.



Lith. Hubert Köhler, München.

3. Aufgabe.

1. Aufstellung der Körper.

a) Der schiefe Kreiszylinder kann ohne weiteres mit den gegebenen Elementen dargestellt werden.

b) Um das Prisma zu konstruieren, zeichnet man zunächst die Spuren E', E'' der Basisebene desselben; nämlich $E' \perp g_1$ durch α_1 und $E'' \perp g_2$ und bestimmt dann den Durchstoßpunkt β der Geraden g durch diese Ebene. Dann legt man die Ebene E um E' in den Grundriß um und ergänzt über $\alpha_1\ \beta_{0}$ das gleichzeitige Dreieck $\alpha_1\ \beta_0\ \gamma_0$. Durch Zurückdrehung findet man $\alpha_1\ \beta_1\ \gamma_1$ und dann $\alpha_2\ \beta_2\ \gamma_2$.

2. Durchdringung. (Vergl. Aufgabe 11, 2.)

Man benützt Hilfsebenen, welche sowohl zu den Mantellinien des Zylinders, als auch zu den Längskanten des Prisma parallel sind. Diese Ebenen schneiden den Zylinder in zwei Mantellinien und das Prisma in zwei zu den Längskanten parallelen Linien: Die Schnittpunkte dieser 4 Schnittgeraden sind Durchdringungspunkte.

Um diese Schnittgeraden zu konstruieren, verlängert man entweder das Prisma bis zum Grundriß oder man bestimmt die Schnittlinien der Hilfsebenen mit der Basisebene E. Hier ist die erste Methode gewählt, in Aufgabe 10 die zweite.

Beispiele:

a) Durch β' Parallele zu $m\,m'$; Spurpunkt $\mathfrak{B}_1$. Der Spurpunkt von $\beta\,\beta'$ ist $\mathfrak{b}_1$. $\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{B}_1$ gibt die Richtung der Grundrißspuren der Hilfsebenen. $\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{B}_1$ muß durch α_1 gehen, weil nach Angabe die Prismenseite $\alpha\,\beta\,\alpha'\,\beta'$ parallel Zylinderachse. $\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{B}_1$ schneidet den Basiskreis in x und y. Parallele durch x und y zu $m\,m'$ schneiden $\beta\,\beta'$ in q und q' und $\alpha\,\alpha'$ in p und p'. Da die Prismenseite $\alpha\,\alpha'\,\beta\,\beta'$ parallel Zylinderachse, so sind die Strecken $p\,q$ und $p'\,q'$ Teile der Durchdringungskurve.

b) $H_1 \parallel \mathfrak{b}_1\,\mathfrak{B}_1$ schneidet $h_1\,\mathfrak{b}_1$ in u_1, $h_1\,d_1$ in v_1; ferner den Basiskreis in c_1 und d_1; die Parallelen durch u_1 und v_1 zur Prismenkante und durch c_1 und d_1 zur Zylinderachse schneiden sich in vier Durchdringungspunkten $I\,I'$ und $II\,II'$. Analog finden sich weitere Punkte.

3. Abwicklung.

Man teilt den Basiskreis des Zylinders in beliebig viele gleiche Teile, hier 16, und legt durch die Zylinderachse $m\,m'$ eine Lotebene zum Grundriss, in welche man die 16 Mantellinien projiziert: $A_{II}\ B_{II}$, $C_{II}\ D_{II}$. Die Schnittfigur ist kongruent der Aufrißprojektion des Zylinders, in Figur 3a aber im verkleinerten Maßstab wiedergegeben. Hierauf wickelt man die einzelnen Mantel-

linien mit den entsprechenden Kurvenpunkten ab. Die wahren Größen verschafft man sich durch ähnliche Dreiecke.

5. Aufgabe.

1. Aufstellung der Körper.

a) Pyramide. Man verbinde im Grund- und Aufriß die Punkte *a b c d* mit *s*.

b) Kegel. Man suche die Spuren E', E'' der Ebene *b c s* mit Hilfe einer Spurparallelen durch *s*. Hierauf fälle man von σ auf diese Ebene die Senkrechte $\sigma\mu$; dieses Lot ist die Höhe des Kegels, μ der Mittelpunkt des Basiskreises. Den Radius des Basiskreises erhält man durch Umlegung des Punktes μ (μ_0). Konstruktion des Berührungskreises an E' und Zurückdrehung. Ohne weiteres lassen sich die Basisellipsen im Grund- und Aufriß konstruieren.

2. Durchdringung. (Vergl. Aufgabe 19.)

Die Pyramidenkanten *s c* und *s b* schneiden die Basisellipse in α, β und γ, δ; also sind $\alpha\delta$ und $\beta\gamma$ Teile der Durchdringungskurve. Da ferner nach Angabe σ in der Ebene *s c d* liegt, verlaufen die Mantellinien $\sigma\delta$ und $\sigma\gamma$ in dieser Ebene und somit sind $\delta\eta$ und $\gamma\varepsilon$ (η und ε Schnitt von $\sigma\delta$ bezw. $\sigma\gamma$ mit *s d*) ebenfalls Teile der Durchdringungskurve. Man hat jetzt noch den Schnitt der beiden Ebenen *s a d* und *s a b* mit dem Kegel zu bestimmen. Hiezu lege man durch die Gerade σs Ebenen. Diese schneiden Kegel und Pyramide nach je zwei Mantellinien. Man erhält durch jede Hilfsebene also vier Punkte.

Beispiel:

Ebene $\sigma_1 s_1 f_1$ schneidet die Basisebene des Zylinders in $s_1 f_1$, den Basiskreis in g_1 und h_1; ferner die Basisebene (Grundriß) der Pyramide in $\sigma_1 f_1$, das Basisviereck in i_1 und k_1. Die Schnittpunkte von $s_1 i_1$ und $s_1 k_1$ mit $\sigma_1 g_1$ und $\sigma_1 h_1$ geben die vier Durchdringungspunkte *I*, *II*, *III*, *IV*. In analoger Weise kann man weitere Punkte konstruieren. Der Kurvenzug ist dann:

$$\alpha_1\ II\ III\ \beta_1\ \gamma_1\ \varepsilon_1\ IV\ I\ \eta_1\ \delta_1\ \alpha_1.$$

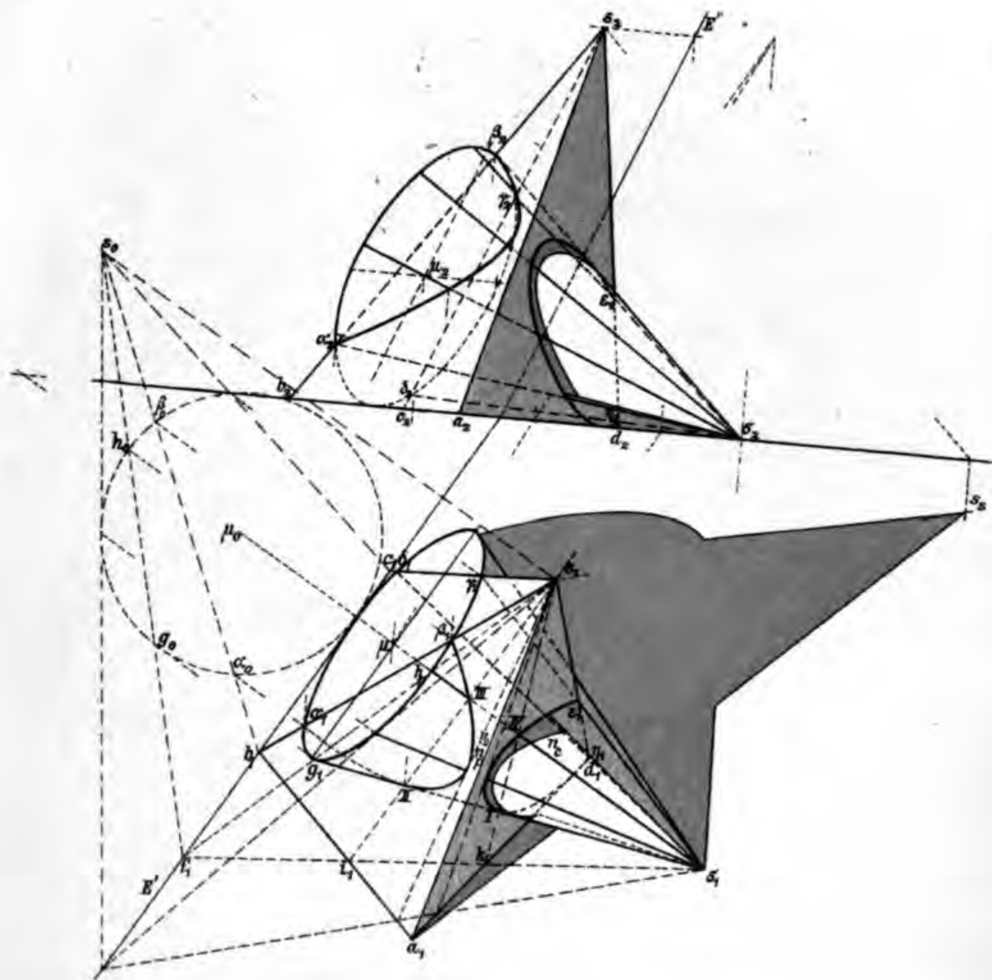
Der Aufriß ergibt sich aus dem Grundriß.

3. Schatten.

Der Schlagschatten der Pyramide ist gegeben.

Um den Schlagschatten des Kegels zu erhalten, bemerke man, daß die Schattenellipse des Basiskreises affin ist zur Basisellipse mit μ_1 als Mittelpunkt. Die Basisellipse aber ist affin zum Kreis um μ_0. Folglich ist die Schattenellipse affin zum Kreis. Man verschafft sich deshalb μ_s*), d. i. der Spurpunkt des durch μ gehenden Lichtstrahles, und kann nun aus der Affinitätsachse E', der Affinitätsrichtung $\mu_0\mu_s$ und den Punkten μ_0 und μ_s die Achsen der Schattenellipse und damit diese selbst konstruieren. Von σ_1 hat man noch die Tangente

*) In der Figur nicht eingetragen.



Lith. Anst. v. Hubert Köhler, München.

Lith. Hubert Köhler, München.

zu ziehen. Diese schneidet $a_1 s_z$ in n_z.*) Projiziert man n_z auf die zugehörige Mantellinie, welche man mittels des Tangentialpunktes findet, zurück, so ergibt sich n_c.

n_c und der auf gleiche Weise mittels der anderen Ellipsentangente gefundene Punkt sind die Ausgangspunkte für den Schatten, welchen $s a$ auf den Kegel wirft. Die Begrenzungskurve dieses Schattens ist die Schnittkurve der Ebene $a_1 s_1 s_z$ mit dem Kegel, also ein Kegelschnitt, hier eine Ellipse. Man konstruiert dieselbe am besten punktweise. Man wähle zwischen n_p und a_1 einen beliebigen Punkt u_1. (Vergl. Tafel 7.) Der Lichtstrahl durch u_1 (u_2) hat den Spurpunkt v_1. $\sigma_1 v_1 x_z$ wird mittels der Schattenellipse auf den Kegel zurückprojiziert und die zugehörige Mantellinie schneidet $u_1 v_1$ bezw. $u_2 v_2$ in einem Schattenkurvenpunkte p. Durch Wiederholung dieses Verfahrens kann man sich weitere Punkte verschaffen.

7. Aufgabe.

1. Aufstellung der Körper.

Die Pyramide ergibt sich durch Verbindung von S mit A, B, C, D.

Die Achse des schiefen Kreiszylinders soll in der Seitenfläche $A B S$ liegen, ferner in der Mitte H auf $A S$ senkrecht stehen. Man klappt deshalb Ebene $S A B$ um $A_1 B_1$ als Achse in den Grundriß um: $A_1 S_0$. Die Mittelsenkrechte in H_0 auf $S_0 A_1$ schneidet $A_1 B_1$ in M_1. M_1 ist der Mittelpunkt des Basiskreises. Nun verlängert man $M_1 H_1$ um sich selbst bis K_1. K_1 ist der Mittelpunkt des Deckkreises.

Der Zylinder soll $C S$ berühren. Also ist eine Ebene durch $C S$ parallel zur Zylinderachse $M K$ eine Tangentialebene des Zylinders und ihre Grundrißspur Tangente an den Basiskreis.

$S_1 T_1 \parallel M_1 K_1$
$S_2 T_2 \parallel M_2 K_2$
$M_1 P_1 \perp C_1 T_1$
$M_1 P_1$ Radius des Basiskreises.

2. Durchdringung.

Man ziehe durch die Spitze S der Pyramide zur Zylinderachse $K M$ eine Parallele $S T$ und lege durch $S T$ ein Büschel von Ebenen. Diese schneiden den Zylinder nach Mantellinien und die Pyramide in Geraden, welche durch die Spitze gehen. Man erhält durch jede Ebene vier Punkte der Durchdringungskurve.

Beispiel:

Ebene $S_1 T_1 d_1$ schneidet den Basiskreis des Zylinders in a_1 und b_1, das Basisviereck der Pyramide in c_1 und d_1. Die Schnittpunkte von $S_1 d_1$ und $S_1 c_1$ mit $a_1 a_1'$ und $b_1 b_1'$ geben die vier Durchdringungspunkte $I\ II\ III\ IV$. In analoger Weise findet man weitere Punkte.

*) In der Figur nicht eingetragen.

Da nach Angabe $S_1 A_1 B_1$ parallel zur Zylinderachse ist, bezw. dieselbe enthält, ist der Schnitt dieser Pyramidenfläche mit dem Zylinder geradlinig.

3. Schatten. (Vergl. Aufgabe 5, 3.)

Man verbindet den Spurpunkt S_s des durch S gehenden Lichtstrahles mit A_1 und C_1.

Um den Spurpunkt K_{s1} des durch K gehenden Lichtstrahles beschreibt man einen Kreis mit $M_1 P_1$ als Radius und zieht die gemeinsamen Tangenten an den Kreis um M_1 und K_{s1}.

Betreffs des Schattenellipsenstückes, welches an den Aufriß fällt, kann man auf zwei Arten verfahren.

Man konstruiert die Aufrißspurpunkte solcher Lichtstrahlen, deren Grundrißspurpunkte hinter die Projektionsachse fallen, z. B. z_s.

Oder man konstruiert die zum Kreise um K_{s1} affine Ellipse, deren Mittelpunkt K_{s2}, d. i. die Aufrißspur des durch K gehenden Lichtstrahles, bekannt ist. Affinitätsachse ist die Projektionsachse.

9. Aufgabe.

1. Aufstellung der Körper.

a) Die Pyramide ist vollständig gegeben.

b) Zur Konstruktion des Prisma legt man durch a eine Lotebene zu g. Diese Ebene ist die Basisebene des Prisma.

$$a_1 l \perp g_1 \text{ gibt } L'$$
$$L'' \perp g_2 \text{ durch } l.$$

Bestimmung des Durchstoßpunktes von g mit $L: c$. Umklappung von Ebene L um L' und Konstruktion des Basisquadrates aus $a_1 c_0 : a_1 b_0 c_0 d_0$. Zurückklappen des Basisquadrates mittels affiner Beziehungen. Man erhält so $a_1 b_1 c_1 d_1$ und $a_2 b_2 c_2 d_2$. Um die Länge $S_{12} S_2$ auf g von c aus abtragen zu können, drehe man g um c in eine Parallelebene zum Aufriß mit Hilfe des Spurpunktes $\mathfrak{e}$.

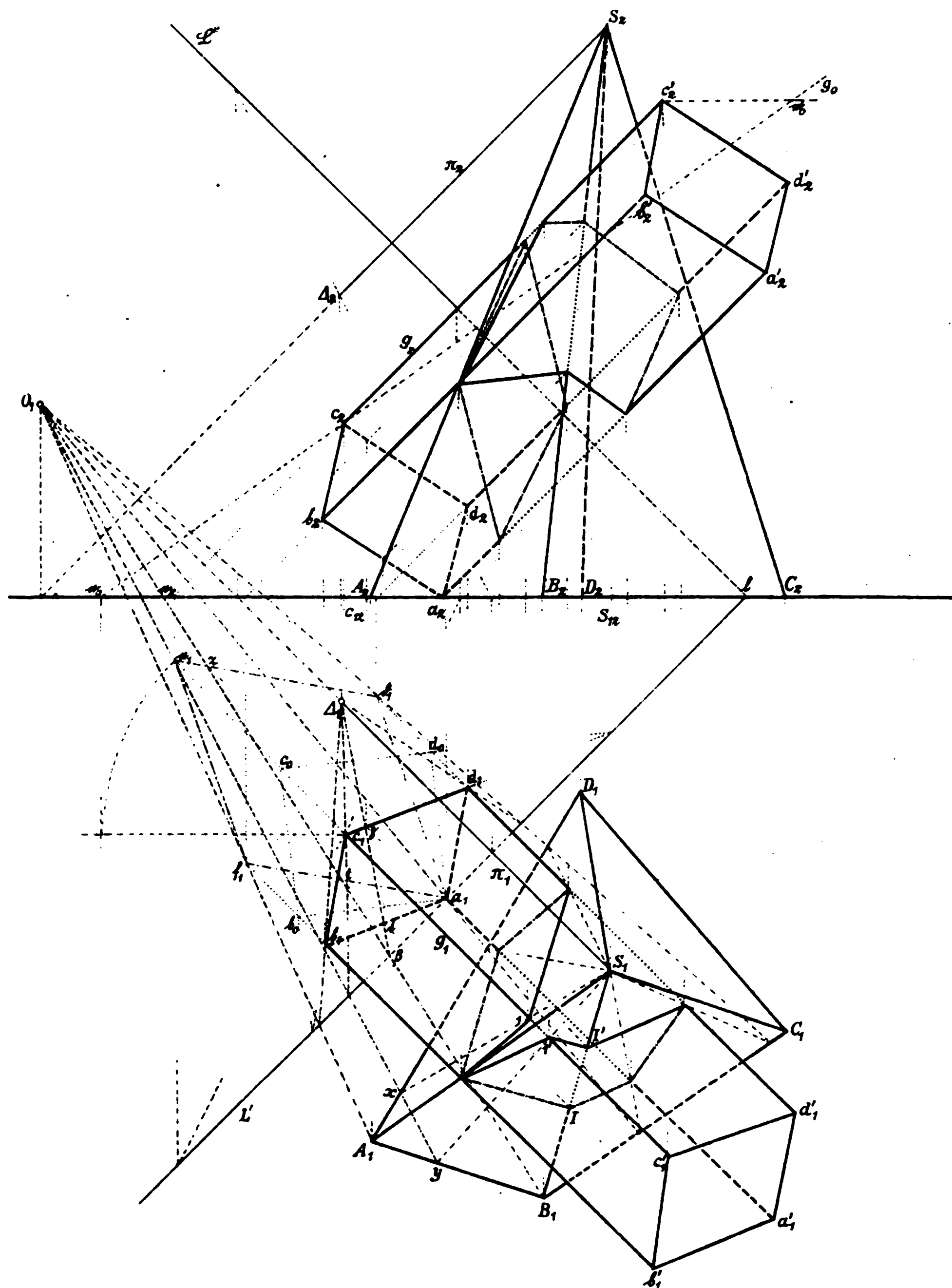
$$c_{12} \mathfrak{e}_0 = c_1 \mathfrak{e}_1$$
$$\mathfrak{e}_0 c_3 \text{ gibt } g_0.$$
$$c_2 \mathfrak{e}_0' = S_{12} S_2$$
$$\mathfrak{e}_0' c_2' \parallel \text{Projektionsachse.}$$

Das Prisma kann nun ohne weiteres vervollständigt werden.

2. Durchdringung der Körper.

Man legt durch die Spitze S der Pyramide eine Parallele π zur Längskante des Prisma und legt durch π ein Ebenenbüschel. Diese Hilfsebenen schneiden die Pyramide in Geraden durch S und das Prisma in Parallelen zu den Längskanten.

Um diese Schnittlinien zu bestimmen, kann man auf zwei Arten verfahren.



Lith. Hubert Köhler, München.

Entweder man verlängert den Körper, dessen Basis nicht in der Grundrißebene liegt, bis zum Grundriß und sucht den Spurpunkt von π. Derselbe sei 0_1; dann schneiden sich die Grundrißspuren sämtlicher Hilfsebenen in 0_1 und geben durch ihren Schnitt mit den Basisfiguren Punkte der gesuchten Schnittlinien.

Oder man bestimmt den Durchstoßpunkt von π mit der Basisebene des schräggestellten Körpers. Er sei Δ. Dann gehen die Grundrißspuren der Hilfsebenen durch 0_1, die Schnittlinien mit der Basisebene durch Δ und zusammengehörige Linien schneiden sich auf der Spur der Basisebene.

Beispiele:

1. $0_1 \mathfrak{e}_1$ schneidet $A_1 D_1$ in x, und $A_1 B_1$ in y. $y S_1$ und $x S_1$ schneiden $c_1 c_1'$ in den Durchstoßpunkten 1 und 1'.

2. $0_1 B_1$ schneidet $\mathfrak{e}_1 \mathfrak{b}_1$ in z, und $f_1 a_1$ in t. Die Parallelen zur Prismenkante durch z und t schneiden $S_1 B_1$ in den Durchstoßpunkten I und I'.

3. Kontrolle: $z I'$ schneidet $c_1 d_1$ in $\mathfrak{z}$, und $t I$ schneidet $a_1 b_1$ in $\mathfrak{t}$, ebenso $0_1 B$ die Spur L' in β. Nun müssen Δ_1, $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{t}$ und β auf einer Geraden liegen. Man kann den Punkt Δ_1, ebenso wie 0_1, zur Konstruktion benützen. Vergleiche Aufgabe 15, 2.

In analoger Weise kann man die übrigen Punkte bestimmen. Es ergibt sich zufälligerweise hiebei, daß $\mathfrak{b}\,\mathfrak{b}'$ und SA sich schneiden.

Betreffs Verbindung der einzelnen Punkte vergleiche Aufgabe 11, 3.

11. Aufgabe.

1. Aufstellung der Körper.

a) Das dreiseitige Prisma kann sofort durch Ziehen der Parallelen BB' und CC' ergänzt werden.

b) Um die Basisebene des vierseitigen Prisma zu erhalten, errichtet man in α auf $\alpha\,\alpha'$ die Lotebene L.

$\alpha_1 \mathfrak{a}_1 \perp \alpha_1 \alpha_1'$ $\mathfrak{a}_1$ auf der Projektionsachse
$\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \perp$ Projektionsachse
$\alpha_2 \mathfrak{a}_2 \parallel$ Projektionsachse
$L'' \perp \alpha_2 \alpha_2'$ durch $\mathfrak{a}_2$ bis $\mathfrak{A}$
$L' \perp \alpha_1 \alpha_1'$ durch $\mathfrak{A}$.

Hierauf bestimmt man den Durchstoßpunkt von g mit L. Derselbe heiße γ. Nun klappt man Ebene L um L' in den Grundriß um und erhält α_0 und γ_0. Das zugehörige Basisquadrat ist $\alpha_0 \beta_0 \gamma_0 \delta_0$. Durch Zurückklappen ergibt sich $\alpha_1 \beta_1 \gamma_1 \delta_1$, sowie $\alpha_2 \beta_2 \gamma_2 \delta_2$. Zieht man durch diese Punkte die Parallelen zu $\alpha_1 \alpha_1'$ bezw. $\alpha_2 \alpha_2'$, so ist das Prisma erledigt.

2. Durchdringung der Körper. (Vergl. Aufgabe 3, 2)

Man kann entweder die einzelnen Durchstoßpunkte der Kanten mit den durch zwei Geraden bestimmten Ebenen suchen oder man legt Ebenen, welche sowohl zu den Kanten des dreiseitigen als des vierseitigen Prisma parallel sind. Konstruktion einer Hilfsebene H. Durch β' Parallele zu BB'; Spurpunkt $\mathfrak{B}_1$. Der Spurpunkt von $\beta\beta'$ ist $\mathfrak{b}_1$. $\mathfrak{b}_1\mathfrak{B}_1$ gibt H' und schneidet L' in $\mathfrak{h}$. $\mathfrak{h}\beta_1$ gibt $\mathfrak{H}$, d. i. die Schnittlinie von Ebene H mit L. Nun zieht man durch BB', CC', AA' parallele Ebenen zu H.

Beispiel: $B_1\mathfrak{d} \parallel H'$
$\mathfrak{d}\mathfrak{e}\mathfrak{f} \parallel \mathfrak{H}$
$\mathfrak{f}I' \parallel \mathfrak{e}I \parallel \beta_1\beta_1'$.

I, I' sind die Durchstoßpunkte von B_1B_1' mit der vierseitigen Pyramide. Ebenso zieht man durch $\alpha\alpha'$, $\gamma\gamma'$ u. s. w. parallele Ebenen zu H.

Beispiel: $\mathfrak{g}\gamma_1 \parallel \mathfrak{H}$
$\mathfrak{g}\mathfrak{i}\mathfrak{k} \parallel H'$
$\mathfrak{i}\,1 \parallel \mathfrak{k}\,1' \parallel B_1B_1'$.

1, 1' sind die Durchstoßpunkte von $\gamma\gamma'$ mit der dreiseitigen Pyramide. In entsprechender Weise findet man die übrigen Punkte.

Um das Durchdringungspolygon zu erhalten, stellt man die Punkte so zusammen, wie sie in den einzelnen Flächen liegen.

A) Dreiseitiges Prisma:			B) Vierseitiges Prisma:		
1.	$AA'BB'$	$III\,1\,I\,I'\,2\,III'$	4.	$\alpha\alpha', \beta\beta'$	$2\,I'\,2'$
2.	$AA'CC'$	$III\,II\,III'\,II'$	5.	$\beta\beta'\gamma\gamma'$	$1\,I\,1'$
3.	$CC'BB'$	$I\,1'\,II\,II'\,2'\,I'$	6.	$\gamma\gamma'\delta\delta'$	$1\,III\,II\,1'$
			7.	$\delta\delta'\alpha\alpha'$	$III'\,2\,II'\,2'$.

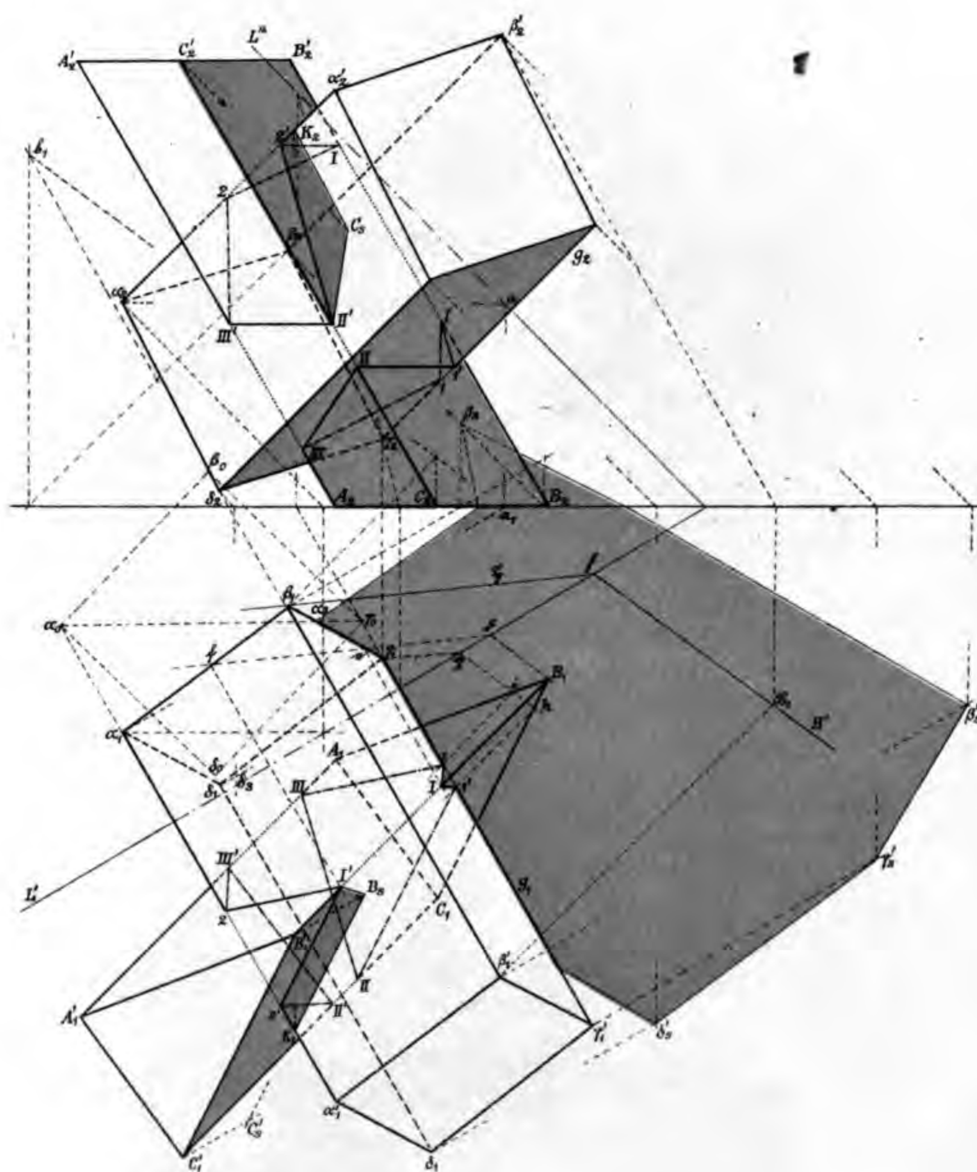
Jetzt wählt man immer solche Verbindungen aus, welche gleichzeitig in Gruppe A und B vorkommen.

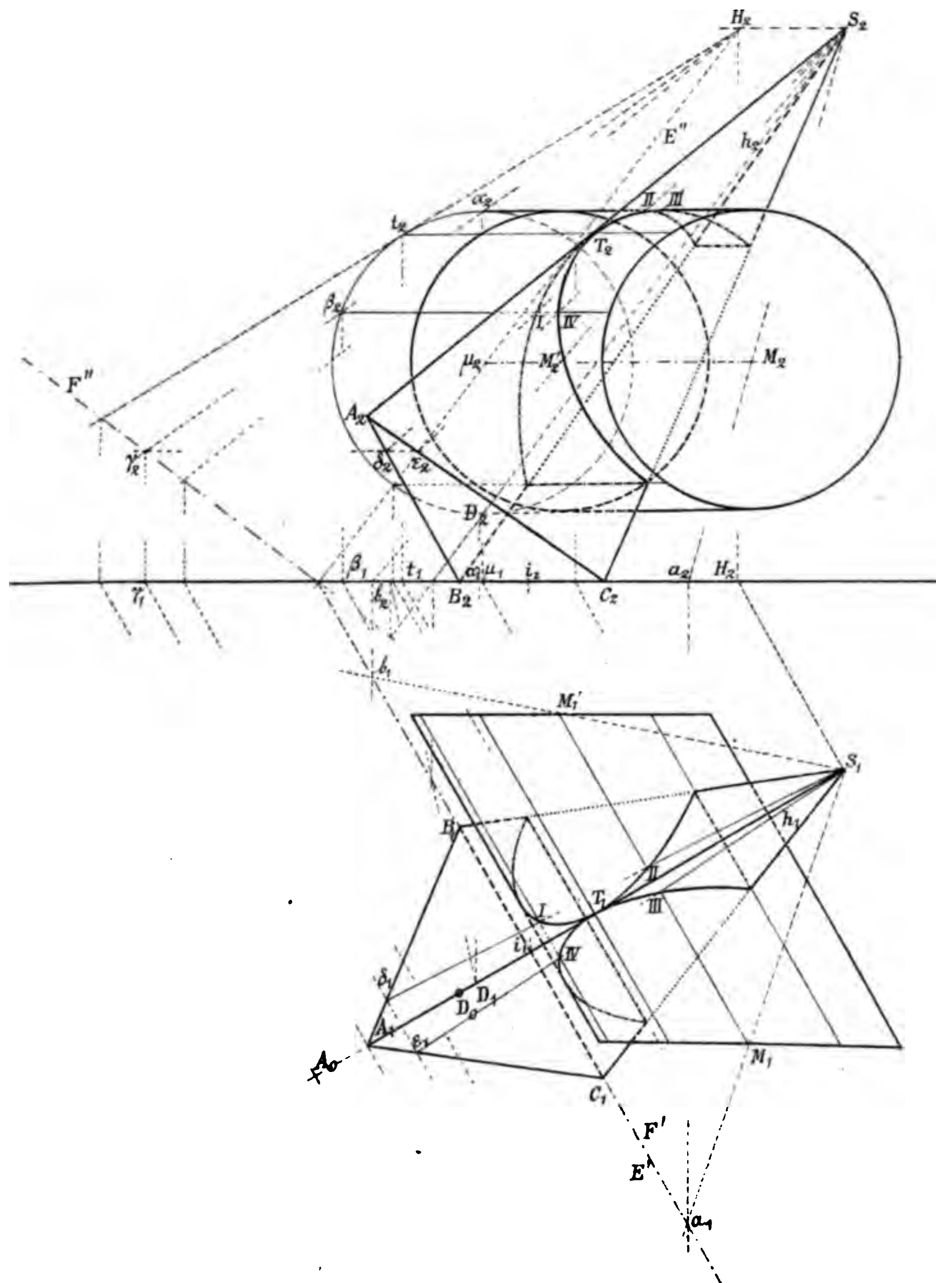
Z. B.:

		Gruppe A		Gruppe B.
$1\,I$	in	1.	und	5.
$I\,1'$	in	3.	und	5.
$1'\,II$	in	3.	und	6.
$II\,III$	in	2.	und	6.
$III\,1$	in	1.	und	6.

Man erhält somit den geschlossenen Kurvenzug $1\,I\,1'\,II\,III\,1$. Analog $I'\,2'\,II'\,III'\,2\,I'$.

Diese schematische Zusammenstellung kann man auch graphisch machen. Man fertigt sich die angenäherten Skizzen der Abwicklungen beider Körper. Jeden konstruierten Punkt trägt man annähernd ein und verbindet dann immer solche Punkte, welche in beiden Abwicklungen in einer Fläche vorkommen. Den so gefundenen Kurvenzug überträgt man in Grund- und Aufriß.


A'2
C'2
L''
B'2
β'2
α'2
K2
I'
C3
g2
III'
II'
β0
δ2
A2
C2
B2
B1
A3
III
I
g1
L'
C1
B3
II
A'1
C'1
C'3
α'1
δ1
γ'1
δ'3
β'3
γ'3



Lith. Hubert Köhler, München.

3. Schatten.

Man bestimmt die Spurpunkte der durch die Ecken δ, γ, β gezogenen Lichtstrahlen und findet so die Schattengrenze $\delta_s' \gamma_s' \beta_s' \beta_s \alpha_s$. Der Schlagschatten des dreiseitigen Prisma wird im Grundriß durch den des vierseitigen Prisma völlig verdeckt. Jedoch fällt Schatten auf die Prismenflächen $\alpha \beta \alpha' \beta'$ und $\alpha \delta \alpha' \delta'$. Man bestimmt die Durchstoßpunkte der durch B' und C' gezogenen Lichtstrahlen mit $\alpha \beta \alpha' \beta$; dieselben sind B_s und C_s'. Dadurch ergibt sich im Grundriß $I' B_s K_1$. Der Durchstoßpunkt des durch C' gezogenen Lichtstrahles mit $\alpha \delta \alpha' \delta'$ ist C_s. Dadurch ergibt sich im Aufriß $K_2 C_s II'$.

13. Aufgabe. (S.-S. 1905.)

1. Aufstellung der Körper.

Der Zylinder ist gegeben. Ein Seitendreieck der Pyramide liegt in der Ebene SMM'. Die Spuren $E' E''$ dieser Ebene erhält man mittels der Spurpunkte a_1 und b_1 von SM und SM' und mittels des Spurpunktes μ_2 von MM'. Die Spuren $F' F''$ der Basisebene der Pyramide stehen senkrecht auf $h_1 h_2$; ferner fällt F' mit E' zusammen. Hierauf klappt man den Durchstoßpunkt D der Pyramidenhöhe h mit der Basisebene F um F' in den Grundriß um (D_0) und konstruiert das gleichseitige Basisdreieck $A_0 B_1 C_1$, oder ohne Umklappung: Es besteht die Beziehung

$$D_1 A_1 : D_1 i_1 = 2:1$$
$$D_2 A_2 : D_2 i_2 = 2:1.$$

2. Durchdringung.

Man legt durch die Spitze S der Pyramide Parallelebenen zur Zylinderachse MM'. Der Träger dieses Ebenenbüschels ist SH. Die Hilfsebenen schneiden den Zylinder nach Mantellinien, die Basisebene der Pyramide in Parallelen zur Spur E', die Pyramide in Geraden durch die Spitze. Zur Erleichterung der Konstruktion verlängert man den Zylinder bis zum Aufriß (Kreismittelpunkt μ_2).

Beispiel:

$H_2 \gamma_2$ schneidet den Zylinderbasiskreis in α_2 und β_2, γ_2 beliebig auf F''. Durch $\alpha_1 \beta_1 \gamma_1$ Parallele zu E'. Die Parallele durch γ_1 schneidet $A_1 B_1$ in δ_1 und $A_1 C_1$ in ε_1. Die vier Schnittpunkte von $S_1 \delta_1$ und $S_1 \varepsilon_1$ mit den Parallelen durch α_1 und β_1 sind Durchdringungspunkte I, II, III, IV.

Oder: $H_2 \gamma_2$ schneidet den Zylinderbasiskreis in α_2 und β_2, γ_2 beliebig auf F''. Die Parallele durch γ_2 zur Projektionsachse (Schnittlinie der Hilfsebene mit Ebene F) schneidet $A_2 B_2$ in δ_2, und $A_2 C_2$ in ε_2. $S_2 \delta_2$ und $S_2 \varepsilon_2$ schneiden die Zylindermantellinien durch α_2 und β_2 in I, II, III, IV.

Durch Wiederholung dieses Verfahrens erhält man eine beliebige Anzahl weiterer Punkte.

Zufälligerweise geht die Aufrißspur $H_2 t_2$ der Hilfsebene durch SA tangential an den Basiskreis, d. h. SA ist Tangente an den Zylinder.

15. Aufgabe.

1. Aufstellung der Körper.

a) Das Prisma ist vollständig gegeben.

b) Zur Konstruktion der Pyramide braucht man vor allem g_1. Man hat bereits den Spurpunkt σ_1; dann lotet man die Schnittpunkte von g_2 mit $\alpha_2 \alpha_2'$ oder $\beta_2 \beta_2'$ auf $\alpha_1 \alpha_1'$ bezw. $\beta_1 \beta_1'$ und erhält als Verbindungslinie g_1.

Die Ebene Mg ist die Basisebene der Pyramide. Um das Basisquadrat zu konstruieren, hat man von M auf g die Senkrechte zu fällen; hiezu zieht man die Spurparallele Mi und dreht die Ebene Mg um $M_1 i_1$ als Achse in eine parallele Lage zum Grundriß.

$\sigma_2 k_2 \perp i_1 M_2$

$\sigma_0 k_2$ Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten $\sigma_1 k_1$ und $i_2 i_{12}$.

$\sigma_0 i_1 = g_0$ (wahre Größe).

$M_2 m_0 \perp g_0$

$m_0 A_0 = m_0 D_0 = m_0 M_1$

$A_0 A_1, m_0 m_1, D_0 D_1 \perp i_1 M_1$

Mm ist das Lot von M auf g und $A_1 D_1$ ist Quadratseite. Durch Verlängerung von $A_1 M_1$ und $D_1 M_1$ über M_1 ergibt C_1 und B_1. Das Basisquadrat läßt sich nun auch im Aufriß zeichnen.

Um die Spitze S der Pyramide zu erhalten, hat man in M auf Ebene Mg das Lot zu errichten und den Durchstoßpunkt S desselben mit Ebene $\alpha \beta \alpha' \beta'$ zu bestimmen.

$h_1 \perp i_1 M_1$ in M_1

$h_2 \perp l_2 M_2$ in M_2

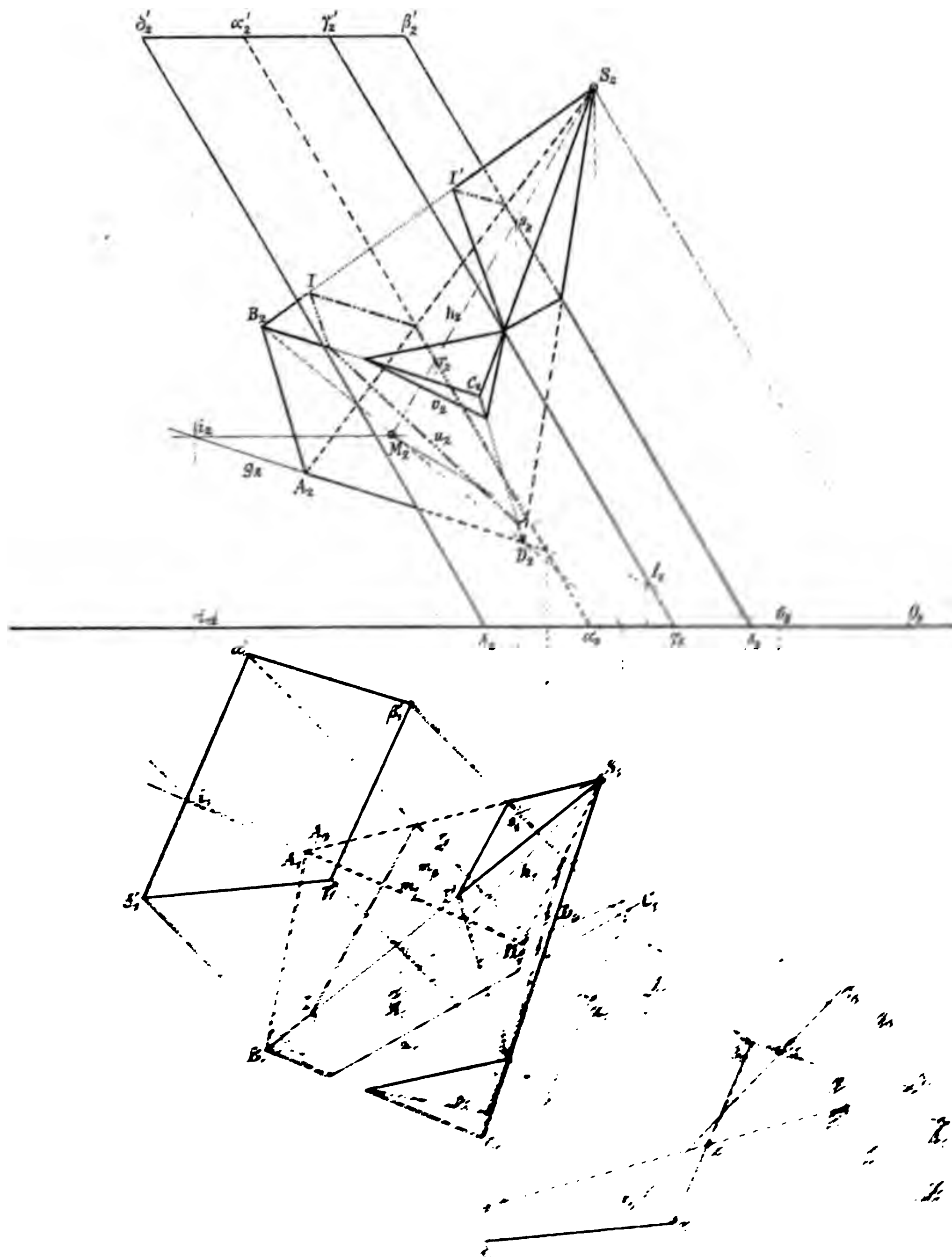
$i_1 M_1$ und $l_2 M_2$ sind Spurparallele der Ebene Mg.

h_2 schneidet $\alpha_2 \alpha_2'$ in r_2 und $\beta_2 \beta_2'$ in s_2

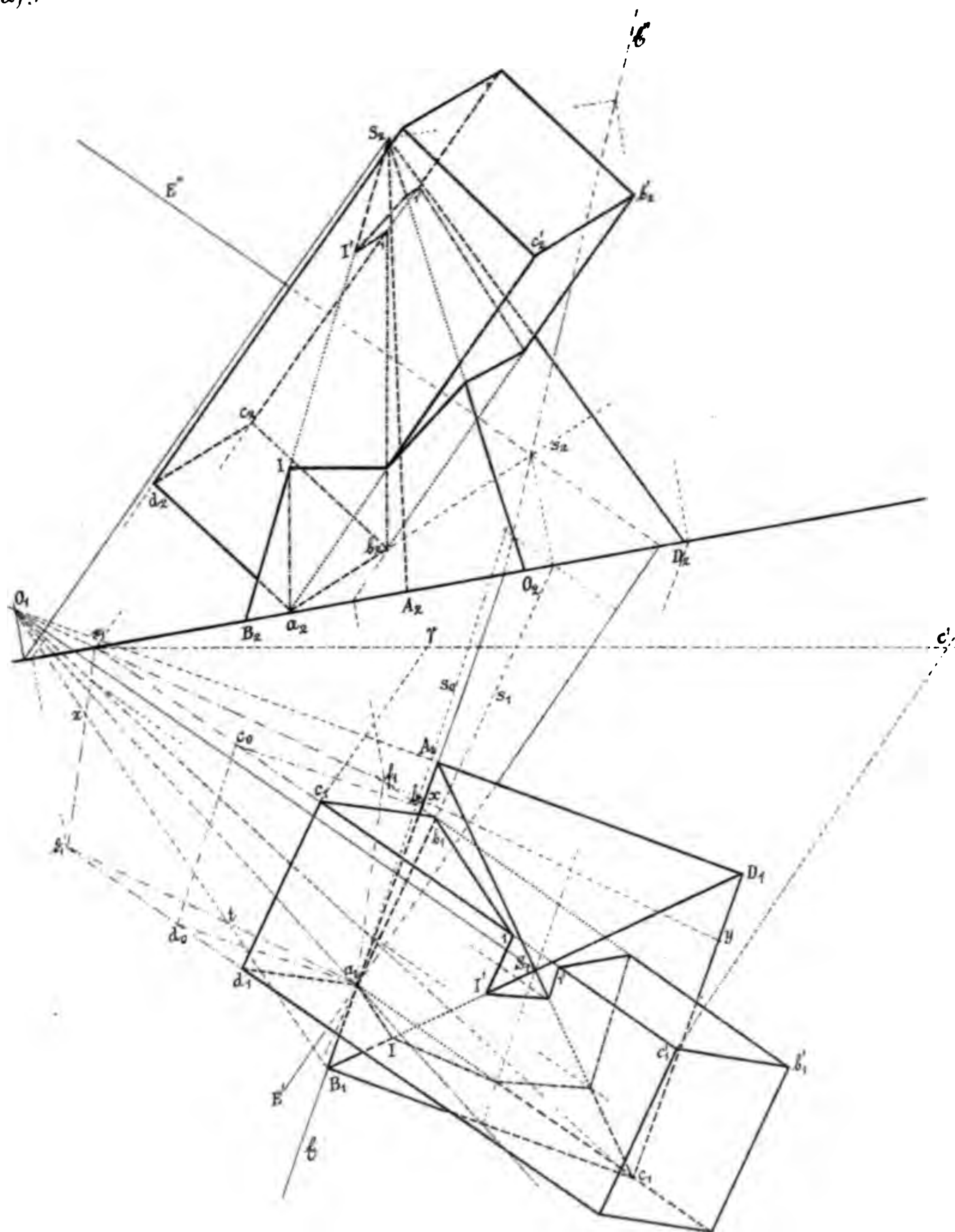
$r_1 s_1$ schneidet h_1 in S_1.

2. Durchdringung der Körper. (Siehe Aufgabe 9, 2.)

Der Durchstoßpunkt der Parallelen durch S zur Prismenkante mit dem Grundriß ist 0_1 und mit der Basisebene der Pyramide Δ_1. Δ_1 liegt auf g_1. Es empfiehlt sich hier nicht, die Pyramide bis zum Grundriß zu verlängern, sondern man benützt besser Δ_1. Mittels Spurpunkte von AD und BD verschafft man sich noch die Grundrißspur L' der Basisebene der Pyramide. Dann legt man Hilfsebenen durch $S 0 \Delta$.



Aufgaben.



Lith. Hubert Köhler, München

Beispiel:

$A_1 B_1$ **schneidet** L' **in** P_2. **0**$_2 P_1$ **schneidet** $\beta_2 \gamma_1$ **in** x **und** $\alpha_2 \delta_2$ **in** y. **Die Parallelen durch** x **und** y **zur Prismenkante schneiden** $S_2 B_2$ **in zwei Durchdringungspunkten** I **und** I'. **Die Wiederholung dieses Verfahrens gibt weitere Punkte.**

Es ergibt sich bei den gegebenen Lagenbeziehungen, daß SC **und** $\gamma\gamma_1$ **sich schneiden; ferner liegen** SAD **und** $\alpha\,\beta\,\alpha'\,\beta'$ **in derselben Ebene.**

Einige Schwierigkeit verursacht der Umstand, daß das Basisviereck der Pyramide das Prisma längs u **und** v **durchdringt. Man bestimmt hiezu die Durchstoßpunkte von** BC **oder** CD **mit den Prismenflächen und beachtet, daß** u **durch den Schnittpunkt von** $\alpha_1 \delta_1$ **mit** L', **d. i.** U_1, **und daß** v **durch den Schnittpunkt von** $\gamma_1 \delta_1$ **mit** L', **d. i.** V_1, **gehen muß. Kontrolle:** u **und** v **schneiden sich auf** $\delta\,\delta'$. **(Betreffs Verbindung vergl. Aufgabe 11.)**

17. Aufgabe. (März 1906.)

1. Aufstellung der Körper.

a) Die zweite Projektion des in Ebene $\mathfrak{E}$ gelegenen Punktes S verschafft man sich durch Spurparallele. Dann kann die Pyramide sofort gezeichnet werden.

b). Um das in Ebene E gelegene Basisquadrat des Prisma zu finden, bestimmt man zuerst die Schnittlinie von Ebene $\mathfrak{E}$ und E (s_1 und s_2). Hierauf Umklappung von s_1 um E' in den Grundriß s_0. $a_1 b_0 = n$. Vervollständigung des Basisquadrates $a_1 b_0 c_0 d_0$ und Zurückklappung. Aufrißprojektion: $a_2 b_2 c_2 d_2$. Die Längskanten stehen senkrecht auf E' bezw. E''. Um die Kantenlänge m aufzutragen, klappt man Kante $c_1 c_1$ in den Grundriß: $c_1 \gamma = c_{12} c_2$ $\gamma c' = m$. (Vergl. auch Aufgabe 9, 1b.)

2. Durchdringung der Körper.

Bei den vorliegenden Lagenbeziehungen liegt SO in der Ebene $bb'cc'$. Im übrigen wird das Verfahren von Aufgabe 9 eingehalten.

19. Aufgabe.

1. Aufstellung der Körper.

a) Pyramide $\sigma\alpha\beta\gamma$. Die Aufrißprojektionen von β und γ liegen auf $\mathfrak{E}''$.

b) Pyramide $SABC$. Man fälle von S auf Ebene E die Senkrechte ($s_1 s_2$) und bestimme ihren Fußpunkt M. Diesen klappt man um E' um: M_0. Aus $M_0 A_1$ konstruiert man das gleichseitige Dreieck $A_1 B_0 C_0$. Zurückdrehung.

2. Durchdringung. (Vergleiche Aufgabe 5.)

Man legt durch die beiden Pyramidenspitzen σ und S eine Gerade, bestimmt deren Schnittpunkte mit den Ebenen $\mathfrak{E}$ und E, nämlich Ω und Σ, und legt

durch diese Gerade ein Büschel von Hilfsebenen. Diese schneiden Ebene 𝔈 in Geraden durch Σ und Ebene E in Geraden durch Ω. Je zwei zusammengehörige Schnittlinien schneiden sich auf dem Schnitt von 𝔈 und E, d. i. 𝔰.

Beispiel:

$\Sigma_1 x_1$ schneidet Dreieck $\alpha_1 \beta_1 \gamma_1$ in $y_1 z_1$, ferner $\Omega_1 x_1$ das Dreieck $A_1 B_1 C_1$ in $B_1 C_1$. Die Geraden $\sigma_1 y_1$, $\sigma_1 z_1$ und $S_1 B_1$, $S_1 C_1$ schneiden sich in vier Punkten: *I II III IV*. $B_1 C_1$ fällt zufälligerweise mit $\Omega_1 x_1$ zusammen. Analog erhält man die übrigen Punkte.

Man kann übrigens die einzelnen Schnittpunkte auch direkt als Schnitt einer Geraden mit einer Ebene, die durch zwei Gerade gegeben ist, finden. Endlich kann man wie in Aufgabe 9 beide Körper bis zum Grundriß verlängern. Die Grundrißspuren der Hilfsebenen verlaufen dann parallel zu $\sigma_1 S_1$.

Bezüglich Verbindung der einzelnen Punkte vergleiche Aufgabe 11.



Druck von Franz X. Seitz, München.

